Известия Академии наук СССР

ISSN 0002-3388



техническая КИБЕРНЕТИКА

1991 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Журнал основан в январе 1963 года

Выходит 6 раз в год

Москва . «Наука»

№ 1

январь—февраль • 1991

СОДЕРЖАНИЕ

Теория автоматического управления

Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г., Рутковский В. Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). I. Анализ с использованием интервальных характеристик полиномов 3

Крищенко А. П., Кушнарев В. И., Назаренко А. Н., Ткачев С. Б. Численные методы дифференциально-геометрического подхода к проблемам нелинейной теории управления 24

Барабанов А. Т. Метод Рауса в теории систем. I. Обобщение проблемы Рауса в задачах теории систем 35

Тимофеев А. В. Свойства обратимых моделей динамики и синтез высококачественного робастного управления 45

Методы и задачи оптимального управления

Фоменко А. В. Синтез сингулярно возмущенной системы управления с использованием полей медленных и быстрых экстремалей 57

Бондарко В. А. Субоптимальное и адаптивное управление непрерывными линейными объектами с запаздыванием 62

Битюцких В. Т. Максиминная задача распределения средств нападения и обороны. II. 69

Кибзун А. И., Курбаковский В. Ю. Численные алгоритмы квантильной оптимизации и их применение к решению задач с вероятностными ограничениями 75

Управление и оценивание при неполной информации

Бочаров В. Ю., Меликян А. А. Задача гарантированного быстродействия с поиском целевой точки в многоугольной области неопределенности 82

Тертычный В. Ю. Оценивание параметров управляемых динамических систем в условиях неизвестного дрейфа 93

Карнаухов В. М., Онищенко А. М. Выбор признаков по эталонным описаниям нормальных трехмерных совокупностей 101

Колобов М. Г. Оценивание состояния динамической системы при наличии неопределенных составляющих в шумах состояния и измерения 108

Управление робототехническими системами

Вукобратович М., Стокич Д. Требуется ли адаптивное управление для манипуляционных роботов, и если да, то в какой мере? 115

Бербюк В. Е., Янчак Я. И. Оптимизация по быстродействию транспортных движений портального робота 126

Заремба А. Т., Зегжда С. В., Коноплев В. А., Левин А. Б. Синтез программных движений роботов на основе обратных задач кинематики 142

Малышев А. Б., Ющенко А. С. Исследование динамического управления манипуляторами 153
Чекушкин В. В. Таблично-алгоритмический преобразователь для вычисления тригонометрических функций 158

Системы автоматизации проектирования

Микишев В. В., Тарасов В. Б. Использование методов искусственного интеллекта в САПР. Анализ отечественного и зарубежного опыта 164

Вычислительные алгоритмы и устройства в системах управления

Волков В. Л., Пакшин П. В. Логарифмическая числовая система в алгоритмах управления и обработки информации 177

Техническая диагностика

Задорожный Д. Ю., Кузьмин А. Б. Математические методы диагностирования технических систем 184

Краткие сообщения

Габелая А. Г. Новый критерий инвариантности спектральных значений линейных автономных систем 206
Чхеидзе Г. А. Синтез алгоритмов управления движением упругих механических систем 209
Волгин Л. Н. Об одной задаче оптимального управления для неминимально-фазового дискретного объекта 212

Аннотации статей депонированных в ВИНТИ 215

Авторский указатель за 1990 год 217

Адрес редакции 125319, Москва, ул. Викторенко, 7
тел. 157-94-18

Зав. редакцией *М. В. Анджиевская*

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62-50

Ю. М. ГУСЕВ, В. Н. ЕФАНОВ, В. Г. КРЫМСКИЙ,
В. Ю. РУТКОВСКИЙ

АНАЛИЗ И СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ) I. АНАЛИЗ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

В первой части обзора приводятся результаты, относящиеся к анализу линейных интервальных динамических систем (ЛИДС) на основании информации об их характеристических полиномах. Рассматриваются задачи исследования устойчивости непрерывных и дискретных ЛИДС, а также получения условий локализации корней их характеристических полиномов в заданной области комплексной плоскости.

Введение. Необходимость обеспечения многорежимности и многофункциональности современных управляющих систем (УС) обусловливает тот факт, что требования, предъявляемые к функционированию УС, должны выполняться в определенном (достаточно широком) диапазоне варьирования характеристик отдельных подсистем. Иными словами, при проектировании системы должен закладываться высокий уровень ее робастности. Последнее свойство включает в себя в первую очередь наличие робастной устойчивости и робастного качества управления в разрабатываемой УС [1]. В наиболее общем случае может идти речь и об оптимальности управления в условиях неопределенности [2].

Важным классом робастных УС являются линейные интервальные динамические системы (ЛИДС). Процессы в ЛИДС описываются обыкновенными линейными дифференциальными или разностными уравнениями, коэффициенты которых представляют собой интервальные числа [1–4]. Каждое интервальное число $A=[\alpha, \beta]$ представляет собой ограниченное величинами α и β подмножество множества R всех действительных чисел

$$A=[\alpha, \beta]=\{x|x\in R\wedge\alpha\leqslant x\leqslant\beta\} \tag{1}$$

Множество всех интервалов вида (1) обозначим через $I(R)$. Тогда, если $A=[\alpha, \beta]\in I(R)$ и $B=[\gamma, \delta]\in I(R)$, то действия над A и В подчиняются следующим правилам интервальной арифметики [2, 3]:

$$A+B=[\alpha+\gamma, \beta+\delta], \tag{2}$$
$$A-B=[\alpha-\delta, \beta-\gamma]; \tag{3}$$

[1] Устойчивость адаптивных систем/*Андерсон Б., Битмид Р., Джонсон К.* и др.; Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 263 с.

[2] *Цыпкин Я. З.* Оптимальность в задачах и алгоритмах оптимизации при наличии неопределенностей // АиТ. 1986. № 1.

$$A \cdot B = [\min\{\alpha\gamma,\ \beta\gamma,\ \alpha\delta,\ \beta\delta\},\ \max\{\alpha\gamma,\ \beta\gamma,\ \alpha\delta,\ \beta\delta\}]; \qquad (4)$$

$$A/B = [\alpha,\ \beta]\ [1/\delta,\ 1/\gamma]. \qquad (5)$$

В некоторых случаях для уточнения результатов перечисленных операций формулы (2)—(5) заменяют выражениями, соответствующими нестандартной интервальной арифметике [3].

Фактически интервальная модель динамической системы отражает реальную ситуацию с информацией о значениях ее параметров, когда априорно известны только границы диапазонов изменения тех или иных величин.

Вопросы анализа и синтеза систем с указанным математическим описанием в настоящее время интересуют широкий круг исследователей. Количество публикаций в данной области непрерывно возрастает. Тем не менее отсутствие обзора по ЛИДС создает трудности для систематизации полученных результатов, а также для формулирования новых постановок задач. Настоящая статья имеет целью отчасти восполнить отмеченный пробел.

Обзор состоит из ряда разделов, содержащих изложение методов и результатов исследования ЛИДС по совокупности основных направлений. Обращается внимание на актуальные нерешенные проблемы. Библиография не претендует на исчерпывающую полноту, однако, по мнению авторов, позволяет проследить развитие наиболее перспективных подходов к обеспечению желаемых свойств систем рассматриваемого класса. Для удобства читателя литература, не относящаяся к тематике ЛИДС, указывается в примечаниях по тексту.

Анализ устойчивости интервальных характеристических полиномов непрерывных систем. Рассмотрим непрерывную динамическую систему, свободное движение которой задано совокупностью дифференциальных уравнений вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \qquad (6)$$

Здесь $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{n\times n}$ — матрица с действительными элементами размера $(n\times n)$, $\mathbf{x}$—n-мерный вектор координат состояния.

Как известно, для асимптотической устойчивости нулевого решения (6) необходимо и достаточно, чтобы характеристический полином

$$f(s) = s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n, \qquad (7)$$

где b_i, $i \in \{1,\ \overline{n}\}$ — действительные коэффициенты, имел корни только в левой половине комплексной плоскости. В случае интервальной системы величины b_i, $i \in \{\overline{1,\ n}\}$ представляют собой интервальные числа

$$b_i \in [\alpha_i,\ \beta_i],\ 0 < \alpha_i \leqslant \beta_i,\ i \in \{\overline{1,\ n}\}. \qquad (8)$$

С этой точки зрения $f(s)$ для такой системы можно отнести к классу интервальных характеристических полиномов (ИХП). Указанный ИХП считается устойчивым, если его корни при любых сочетаниях значений b_i, $i \in \{\overline{1,\ n}\}$, удовлетворяющих (8), лежат в левой половине комплексной плоскости.

Фундаментальные результаты, определяющие необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости ИХП, получены Харитоновым [5]. Они содержатся в формулировках следующих двух теорем.

Теорема 1. Для того чтобы $\Gamma^n \subset G^n$, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma_1^n \subset G^n$.

Здесь G^n — множество полиномов вида (7), все корни которых лежат в левой половине комплексной плоскости, Γ^n — семейство всех полиномов (7) с коэффициентами, удовлетворяющими (8), а Γ_1^n — семейство тех полиномов из Γ^n, у которых каждый коэффициент b_i, $i \in \{1,\ \overline{n}\}$ равен либо α_i, либо β_i (т. е. Γ_1^n содержит 2^n полиномов).

Необходимость сформулированного утверждения очевидна, так как $\Gamma_1^n \subset \Gamma^n$. Доказательство достаточности осуществляется методом математической индукции по n. При этом используется представление полиномов $f(s)$ в виде суммы

$$f(s)=h(s^2)+sg(s^2),$$

где $h(\lambda)$, $g(\lambda)$ — некоторые полиномы от переменной λ, причем степени этих полиномов однозначно связаны со степенью $f(s)$.

Ход дальнейших рассуждений опирается на теорему Эрмита — Билера, устанавливающую взаимосвязь между областями расположения корней $f(s)$, $h(\lambda)$ и $g(\lambda)$, а также на критерий Н. Г. Четаева [3], согласно которому необходимым и достаточным условием принадлежности $f(s)$ множеству G^n при $b_1>0$ является принадлежность вспомогательного полинома

$$\varphi(s)=\frac{(-1)^n sf(-s)-(s-2b_1)f(s)}{2b_1^2}$$

множеству G^{n-1}.

Теорема 2. Для того чтобы $\Gamma_1^n \subset G^n$, необходимо и достаточно, чтобы четыре полинома $f_i(s)$, $i\in\{\overline{1, 4}\}$ из Γ_1^n со следующими наборами коэффициентов:

$f_1(s)$ —

$$b_{n-2k}=\begin{cases}\beta_{n-2k}, & k \text{ четно,}\\ \alpha_{n-2k}, & k \text{ нечетно,}\end{cases}$$

$$b_{n-2k-1}=\begin{cases}\beta_{n-2k-1}, & k \text{ четно,}\\ \alpha_{n-2k-1}, & k \text{ нечетно;}\end{cases}$$

$f_2(s)$ —

$$b_{n-2k}=\begin{cases}\alpha_{n-2k}, & k \text{ четно}\\ \beta_{n-2k}, & k \text{ нечетно,}\end{cases}$$

$$b_{n-2k-1}=\begin{cases}\alpha_{n-2k-1}, & k \text{ четно,}\\ \beta_{n-2k-1}, & k \text{ нечетно;}\end{cases}$$

$f_3(s)$ —

$$b_{n-2k}=\begin{cases}\alpha_{n-2k}, & k \text{ четно,}\\ \beta_{n-2k}, & k \text{ нечетно,}\end{cases}$$

$$b_{n-2k-1}=\begin{cases}\beta_{n-2k-1}, & k \text{ четно,}\\ \alpha_{n-2k-1}, & k \text{ нечетно;}\end{cases}$$

$f_4(s)$ —

$$b_{n-2k}=\begin{cases}\beta_{n-2k}, & k \text{ четно,}\\ \alpha_{n-2k} & k \text{ нечетно;}\end{cases}$$

$$b_{n-2k-1}=\begin{cases}\alpha_{n-2k-1}, & k \text{ четно,}\\ \beta_{n-2k-1}, & k \text{ нечетно;}\end{cases}$$

принадлежали G^n.

Доказательство данной теоремы строилось автором на основе индукции по n. Следует отметить, что в дальнейшем было предложено более простое и наглядное доказательство теоремы 2, использующее анализ свойств интервальных полиномов в частотной области [6]. В этой работе рассматривается полином

$$f(s)=b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_0, \tag{9}$$

[3] *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965.

отличающийся от (7) наличием коэффициента при старшей степени s (т. е. более общий случай), а также «обратной» индексацией коэффициентов $b_i \in [\alpha_i, \beta_i]$, $i \in \{\overline{0, n}\}$. Полиномы $f_j(s)$, $j \in \{\overline{1, 4}\}$ в такой ситуации приобретают вид

$$f_1(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \ldots = f(s, E_1, O_1), \tag{10}$$

$$f_2(s) = \beta_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \beta_3 s^3 + \ldots = f(s, E_1, O_2), \tag{11}$$

$$f_3(s) = \alpha_0 + \beta_1 s + \beta_2 s^2 + \alpha_3 s^3 + \ldots = f(s, E_2, O_1), \tag{12}$$

$$f_4(s) = \alpha_0 + \alpha_1 s + \beta_2 s^2 + \beta_3 s^3 + \ldots = f(s, E_2, O_2). \tag{13}$$

Фактически $f_j(s)$, $j \in \{\overline{1, 4}\}$ сформированы с использованием множеств $E_1 = \{\beta_0, \alpha_2, \beta_4, \alpha_6, \ldots\}$, $E_2 = \{\alpha_0, \beta_2, \alpha_4, \beta_6, \ldots\}$ значений коэффициентов с четными индексами и

$$O_1 = \{\beta_1, \alpha_3, \beta_5, \alpha_7, \ldots\}, \quad O_2 = \{\alpha_1, \beta_3, \alpha_5, \beta_7, \ldots\}$$

аналогичных значений применительно к нечетным индексам. Пусть $E^* = \{b_0^*, b_2^*, b_4^*, \ldots\}$, $O^* = \{b_1^*, b_3^*, b_5^*, \ldots\}$ — множества фиксированных значений коэффициентов соответственно с четными и нечетными индексами, удовлетворяющих неравенствам

$$\alpha_i \leqslant b_i^* \leqslant \beta_i, \quad i \in \{\overline{0, n}\}.$$

Тогда справедливы следующие леммы.

Лемма 1. Если устойчивы два полинома $f(s, E^*, O_1)$ и $f(s, E^*, O_2)$, то устойчиво семейство полиномов $f(s, E^*, O)$, где O обозначает множество произвольных значений нечетных коэффициентов из заданных интервалов.

Лемма 2. Если устойчивы два полинома $f(s, E_1, O^*)$ и $f(s, E_2, O^*)$, то устойчиво семейство полиномов $f(s, E, O^*)$, где E обозначает множество произвольных значений четных коэффициентов из заданных интервалов.

При доказательстве леммы 1 осуществляется подстановка $s = j\omega\,(0 \leqslant \omega < \infty)$, и в выражении для $f(j\omega, E^*, O)$ выделяются действительная и мнимая части

$$\mathrm{Re}[f(j\omega, E^*, O)] = b_0^* - b_2^* \omega^2 + b_4^* \omega^6 - \ldots,$$

$$\mathrm{Im}[f(j\omega, E^*, O)] = b_1 \omega - b_3 \omega^3 + b_5 \omega^5 - \ldots$$

Таким образом, $\mathrm{Re}[f(j\omega, E^*, O)]$ имеет фиксированное значение при каждом конкретном ω, а $\mathrm{Im}[f(j\omega, E^*, O)]$ удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{Im}[f(j\omega, E^*, O_2)] \leqslant \mathrm{Im}[f(j\omega, E^*, O)] \leqslant \mathrm{Im}[f(j\omega, E^*, O_1)].$$

Взаимное расположение годографов рассматриваемых комплексно-значимых функций показано на рис. 1. Основываясь на критерии устойчивости Михайлова, можно утверждать, что если «граничные» годографы соответствуют устойчивым характеристическим полиномам, то $f(s, E^*, O)$ — также устойчивый полином.

Совершенно аналогично доказывается и лемма 2. Из справедливости лемм 1 и 2 следует достаточность условий, указанных в формулировке теоремы 2 Харитонова (их необходимость очевидна).

Важно подчеркнуть, что стремление придать различную интерпретацию результатам В. Л. Харитонова неоднократно ориентировало тех или иных авторов на поиск новых вариантов доказательства теоремы 2 (например, в [7] это сделано на основе геометрического подхода).

Дальнейшие исследования показали, что для ИХП низкого порядка ($n=2, 3, 4, 5$) условия устойчивости, заданные в этой теореме, несколько избыточны. Первые результаты, приводящие к таким выводам, изложены в [8]. Автор справедливо отмечает, что для устойчивости ИХП третьего порядка необходимо и достаточно, чтобы был устойчив только один полином из перечисленных в выражениях (10)—(13): $f_2(s)$. Что

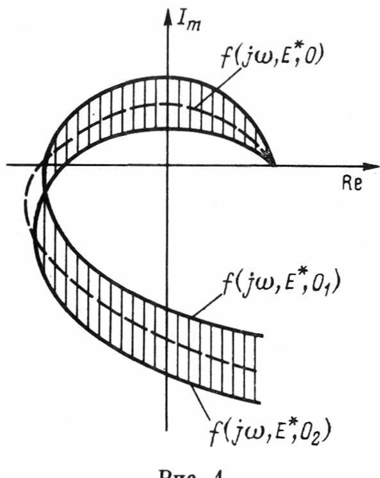


Рис. 1

же касается ИХП четвертого порядка, то их устойчивость предлагается оценивать по расположению корней следующих четырех полиномов:

$$f_1'(s)=\beta_0+\beta_1 s+\alpha_2 s^2+\alpha_3 s^3+\beta_4 s^4;$$
$$f_2'(s)=\beta_0+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2+\beta_3 s^3+\beta_4 s^4;$$
$$f_3'(s)=\beta_0+\alpha_1 s+\alpha_2 s^2+\alpha_3 s^3+\beta_4 s^4;$$
$$f_4'(s)=\beta_0+\beta_1 s+\alpha_2 s^2+\beta_3 s^3+\beta_4 s^4.$$

Нетрудно убедиться, что $f_1'(s)=f_1(s)$, $f_2'(s)=f_2(s)$. Тем не менее $f_3'(s)$ и $f_4'(s)$ отличны от полиномов $f_3(s)$ и $f_4(s)$. Исходя из этого, ставится под сомнение правомерность теоремы 2, доказанной выше.

Возникшее противоречие разрешается в работах [9, 10]. В [9] показано, что для ИХП четвертого порядка из устойчивости $f_1(s)$, $f_2(s)$ (10), (11) следует устойчивость $f_3(s)$, $f_4(s)$ (12), (13). Совершенно аналогично в [10] дается подтверждение тому факту, что из устойчивости $f_1'(s)$, $f_2'(s)$ вытекает и устойчивость $f_3'(s)$, $f_4'(s)$. Таким образом, в рассматриваемой ситуации анализ устойчивости ограничивается исследованием свойств двух полиномов: $f_1(s)$, $f_2(s)$. В [9] также показано, что при $n=5$ следует определять устойчивость трех полиномов ($f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$), а при $n\geqslant 6$ какое-либо упрощение условий, содержащихся в формулировке теоремы 2, невозможно.

Заслугой Харитонова является и то, что он распространил предложенный им подход к исследованию устойчивости на случай интервальных полиномов с комплексными коэффициентами [11].

Пусть далее K^n — семейство полиномов порядка n

$$F(s)=\sum_{k=0}^{n} p_k s^{n-k} (p_k\neq 0) \tag{14}$$

с комплексными коэффициентами

$$p_k=b_k+jc_k,\ \ k\in\{0,\ \bar{n}\}, \tag{15}$$

где b_k, c_k принадлежат заданным интервалам

$$b_k\in[\alpha_k,\ \beta_k],\ \ c_k\in[\gamma_k,\ \delta_k],$$
$$0<\alpha_k\leqslant\beta_k,\ \ 0<\gamma_k\leqslant\delta_k,\ \ k\in\{0,\ \bar{n}\}.$$

Обозначим H^n множество всех полиномов вида (14), корни которых лежат в левой полуплоскости. Задача состоит в нахождении условий, при которых $K^n\subset H^n$. Предварительно осуществим подстановку $s=j\omega$ и

запишем

$$F(j\omega)=h(\omega)+jg(\omega),$$

где $h(\omega)$, $g(\omega)$ — действительные полиномы от ω. Можно говорить, что полином $F(s)$ определяется парой (h, g). Тогда основной результат работы [10] формулируется в следующей форме.

Теорема 3. Для того чтобы $K^n \subset H^n$, необходимо и достаточно, чтобы восемь полиномов из K^n, определенных парами (h_1, g_1), (h_1, g_2), (h_2, g_1), (h_2, g_2), (h_3, g_3), (h_3, g_4), (h_4, g_3), (h_4, g_4), лежали в H^n.

Здесь $h_i(\omega)$, $g_i(\omega)$, $i \in \{\overline{1, 4}\}$ — полиномы с сосредоточенными коэффициентами, вычисляемыми согласно нижеперечисленным правилам:

$h_1(\omega)$ —

$$b_{n-2k}, c_{n-2k-1} = \begin{cases} \alpha_{n-2k}, \gamma_{n-2k-1}, & k \text{ четно}, \\ b_{n-2k}, \delta_{n-2k-1}, & k \text{ нечетно}; \end{cases}$$

$h_2(\omega)$ —

$$b_{n-2k}, c_{n-2k-1} = \begin{cases} \beta_{n-2k}, \delta_{n-2k-1}, & k \text{ четно}, \\ \alpha_{n-2k}, \gamma_{n-2k-1}, & k \text{ нечетно}; \end{cases}$$

$h_3(\omega)$ —

$$b_{n-2k}, c_{n-2k-1} = \begin{cases} \alpha_{n-2k}, \delta_{n-2k-1}, & k \text{ четно}, \\ \beta_{n-2k}, \gamma_{n-2k-1}, & k \text{ нечетно}; \end{cases}$$

$h_4(\omega)$ —

$$b_{n-2k}, c_{n-2k-1} = \begin{cases} \beta_{n-2k}, \gamma_{n-2k-1}, & k \text{ четно}, \\ \alpha_{n-2k}, \delta_{n-2k-1}, & k \text{ нечетно}; \end{cases}$$

$g_1(\omega)$ —

$$b_{n-2k-1}, c_{n-2k} = \begin{cases} \beta_{n-2k-1}, \gamma_{n-2k}, & k \text{ четно}, \\ \alpha_{n-2k-1}, \delta_{n-2k}, & k \text{ нечетно}; \end{cases}$$

$g_2(\omega)$ —

$$b_{n-2k-1}, c_{n-2k} = \begin{cases} \alpha_{n-2k-1}, \delta_{n-2k}, & k \text{ четно}, \\ \beta_{n-2k-1}, \gamma_{n-2k}, & k \text{ нечетно}; \end{cases}$$

$g_3(\omega)$ —

$$b_{n-2k-1}, c_{n-2k} = \begin{cases} \alpha_{n-2k-1}, \gamma_{n-2k}, & k \text{ четно}, \\ \beta_{n-2k-1}, \sigma_{n-2k}, & k \text{ нечетно}; \end{cases}$$

$g_4(\omega)$ —

$$b_{n-2k-1}, c_{n-2k} = \begin{cases} \beta_{n-2k-1}, \delta_{n-2k}, & k \text{ четно}, \\ \alpha_{n-2k-1}, \gamma_{n-2k}, & k \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Доказательство приведенного утверждения, как и теорем 1, 2, связано с использованием теоремы Эрмита — Билера. Позднее было предложено более простое доказательство [12].

Полученный результат, как будет видно далее, играет важную роль при решении задачи о распределении полюсов ИХП с действительными коэффициентами в заданной области, если эта область представляет собой сектор в левой половине комплексной плоскости.

Перечисленные теоремы дают ответ на вопрос об устойчивости ИХП непрерывных систем. Тем не менее существует другая проблема, тесно связанная с данным вопросом: как оценить запасы устойчивости интервальной системы с точки зрения определения допустимых пределов варьирования ее параметров. Указанное направление развивается в работах [13—20]. При этом в [13] предложены достаточные условия устойчивости ИХП, которые сводятся к проверке наличия этого свойства у вспомогательного полинома порядка $2n$. Возникает возможность сопоставления значений параметров с «граничными» для устойчивости такого по-

линома (что, впрочем, не позволяет судить о границах фактической области устойчивости в пространстве параметров вследствие достаточности применяемого критерия). В работах [14—16] предполагается, что наибольшие значения относительных приращений параметров априорно известны. Применительно к этому случаю задача сводится к поиску максимума одного эквивалентного параметра, косвенно характеризующего допустимые пределы коэффициентов ИХП, при которых еще не нарушаются условия теоремы 2. Для ИХП общего вида (14) с коэффициентами (15) указанный параметр $2n$ может вводиться в рассмотрение, исходя из того, что

$$b_k \in [b_k^0 - t_k \cdot \mu,\ b_k^0 + r_k \cdot \mu],$$

$$c_k \in [c_k^0 - g_k \cdot \mu,\ c_k^0 + u_k \cdot \mu],$$

где b_k^0, c_k^0 — номинальные значения параметров b_k, c_k (считается, что при $b_k = b_k^0$ и $c_k = c_k^0 - F(s)$ — устойчив); t_k, r_k, g_k, u_k — неотрицательные числа.

Алгоритм максимизации μ впервые предложен в [14], будучи ориентированным на случай $n=4$, $c_k^0=0$, $k \in \{\overline{0,\ n}\}$. Более общая ситуация ($c_k^0=0$, n — произволен) рассмотрена в [15]. Наконец, распространение данного подхода на случай ИХП с произвольными коэффициентами осуществлено в [16]. Следует отметить, что в последнее время появилась возможность использования этих результатов для исследования устойчивости полиномов и от двух переменных (s_1, s_2) [17].

Существенные результаты, относящиеся к решению проблемы устойчивости ИХП линейных непрерывных систем, а также определение их запасов устойчивости, получены в [18—20]. Они, как показывают дальнейшие исследования [21], могут послужить отправной точкой для интервальной формулировки критерия устойчивости Михайлова. Методика автора указанного цикла работ основывается на переходе к анализу частотных характеристик интервальных систем и применении принципа аргумента Коши.

Пусть задан устойчивый характеристический полином $f_0(s)$ с фиксированными коэффициентами b_i^0, $i \in \{0,\ n\}$ для некоторого номинального состояния системы

$$f_0(s) = b_n^0 s^n + b_{n-1}^0 s^{n-1} + \ldots + b_1^0 s + b_0^0. \qquad (16)$$

Будем считать, что для каждого из этих коэффициентов может иметь место неизвестное, но ограниченное приращение произвольного знака

$$|\delta b_i| \leqslant \Delta b_i,\ \ i \in \{\overline{0,\ n}\}.$$

Здесь $\Delta b_i > 0$, $i \in \{\overline{0,\ n}\}$ — заранее определенные границы указанных приращений.

После подстановки $s = j\omega$ из (16) получаем

$$f_0(j\omega) = R_0(\omega) + j\omega Q_0(\omega),$$

где

$$R_0(\omega) = b_0^0 - b_2^0\omega^2 + b_4^0\omega^4 + \ldots + (-1)^{m/2} b_m^0 \omega^m,$$
$$Q_0(\omega) = b_1^0 - b_3^0\omega^2 + b_5^0\omega^4 + \ldots + (-1)^{(l-1)/2} b_l^0 \omega^{(l-1)},$$

причем

$$m=n,\ l=n-1 \text{ при } n \text{ четном};$$
$$l=n,\ m=n-1 \text{ при } n \text{ нечетном}.$$

Сформируем четыре полинома от ω с «экстремальными» значениями коэффициентов согласно равенствам

$$R_1(\omega) = R_0(\omega) + \Delta R(\omega),\ \ R_2(\omega) = R_0(\omega) - \Delta R(\omega),$$
$$Q_1(\omega) = Q_0(\omega) + \Delta Q(\omega),\ \ Q_2(\omega) = Q_0(\omega) - \Delta Q(\omega).$$

Здесь

$$\Delta R(\omega)=\Delta b_0^0+\Delta b_2^0\omega^2+\ldots+\Delta b_m^0\omega^m;$$
$$\Delta Q(\omega)=\Delta b_1^0+\Delta b_3^0\omega^2+\ldots+\Delta b_l^0\omega^{l-1}.$$

В связи с тем, что рассматриваемые полиномы $R_1(\omega)$, $R_2(\omega)$ фактически зависят от ω^2, можно утверждать, что каждый из них имеет не более чем $m/2$ действительных неотрицательных корней.

Обозначим $\Delta\omega_{r_i}$ $i\in\{\overline{1, m/2}\}$ частотный диапазон между j-ми корнями уравнений

$$R_1(\omega)=0$$

и

$$R_2(\omega)=0.$$

Рассуждая совершенно аналогично, найдем частотные диапазоны $\Delta\omega_{qj}$, $j\in\{1, \overline{(l-1)}/2\}$ между соответствующими j-ми корнями уравнений

$$Q_1(\omega)=0$$

и

$$Q_2(\omega)=0.$$

Тогда справедливы следующие утверждения [20].

Лемма 3. Для устойчивости интервального полинома $f(s)$, сформированного на основе $f_0(s)$ с приращениями (17), необходимо и достаточно, чтобы был устойчивым $f_0(s)$, а также выполнялось хотя бы одно из условий:

$$1)\quad \forall\omega\in\Delta\omega_{qj},\quad j\in\{1, \overline{(l-1)/2}\}: |R_0(\omega)|>\Delta R(\omega);$$
$$2)\quad \forall\omega\in\Delta\omega_{r_i},\quad i\in\{1, \overline{m/2}\}: |Q_0(\omega)|>\Delta Q(\omega).$$

Теорема 4. Для устойчивости ИХП $f(s)$ необхоимо и достаточно, чтобы вышеупомянутые частотные диапазоны $\Delta\omega_{ri}$, $i\in\{\overline{1, m}/2\}$ и $\Delta\omega_{qj}$, $j\in\{1, (\overline{l-1})/2\}$ не перекрывались.

Применение последней теоремы иллюстрируется рис. 2, 3, где показаны $\Delta\omega_{ri}$, $i\in\{\overline{1, 3}\}$ и $\Delta\omega_{qj}$, $j\in\{1, (\overline{l-1})/2\}$ в случае ИХП шестого порядка. Система, для которой рассмотренные частотные диапазоны соответствуют рис. 2, будет устойчивой в робастном смысле, причем расстояние между границами двух наиболее «близких» областей $\Delta\omega_{q_1}$ и $\Delta\omega_{r_2}$ может быть выбрано в качестве оценки запаса устойчивости $(\Delta\overline{\omega})$. Напротив, система, соответствующая рис. 3, неустойчива.

В заключение данного раздела отметим, что понятие запаса устойчивости интервальной системы может трактоваться и в более широком смысле. Например, в работах [22, 23] решается следующий весьма актуальный вопрос: нельзя ли по информации об интервальной модели объекта уже перед проведением синтеза сделать вывод о существовании (или несуществовании) регулятора с постоянными параметрами, который обеспечивает робастную устойчивость соответствующей системы управления? При этом наиболее общий результат получен применительно к структурной схеме (рис. 4), где $\mathbf{P}_k(s)$, $\mathbf{R}(s)$ — передаточные матрицы размеров $(p\times m)$ и $(m\times p)$ объекта и регулятора; $\mathbf{y}(s)$ и $\mathbf{u}(s)-m$ — местные векторы управляемых координат и задающих воздействий. В свою очередь

$$\mathbf{P}_k(s)=\mathbf{K}\cdot\mathbf{P}_0(s). \tag{18}$$

Здесь $\mathbf{P}_0(s)$ — некоторая «номинальная» передаточная матрица, а $\mathbf{K}=\mathrm{diag}\,\|k_1,\ldots,k_p\|$, причем $k_i\in[\alpha,\ \beta]$, $i\in\{\overline{1,\ p}\}$. Границы α, β заданного интервала подчиняются неравенству

$$0<\alpha<1<\beta$$

Тогда справедлива следующая теорема [23].

Теорема 5. Для устойчивости системы управления объектом, модель которого характеризуется соотношением (18), необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\beta/\alpha < [(1+\sqrt[p]{\gamma_{\max}})/(1-\sqrt[p]{\gamma_{\max}})]^2.$$

В данном выражении $\gamma_{\max}$ — так называемый инвариант [22], который находится в результате следующей последовательности рассуждений.

Пусть $\mathbf{P}_0(s)$ имеет r матричных нулей $z_1, \ldots, z_r$ и q необщих полюсов $z_1, \ldots, z_q$ (подстановка $s=z_i$ $i \in \{\overline{1, r}\}$ обращает в нуль все элементы матрицы $P_0(s)$; полюс z_j, $j \in \{\overline{1, q}\}$ считается необщим, если он отсутствует хотя бы у одного элемента матрицы $\mathbf{P}_0(s)$. Рассмотрим теперь конформное отображение $\varphi : \overline{D} \to \tilde{H}$, где $\overline{D}$ — замкнутое множество, ограниченное окружностью единичного радиуса, $\tilde{H} = \overline{H} \cup \{\infty\}$, $\overline{H}$ — правая половина комплексной плоскости (вместе с осью ординат).

Найдем комплексные числа

$$a_i = \varphi^{-1}(z_i), \quad i \in \{1, \bar{r}\},$$
$$a_g = \varphi^{-1}(z_{g-r}), \quad g \in \{\overline{(r+1), (r+q)}\},$$

которые, согласно определению отображения φ, принадлежат $\overline{D}$.

С использованием a_i, $i \in \{\overline{1, (r+q)}\}$, а также сопряженных с ними величин a_i^*, сформируем матрицы

$$\mathbf{A} = \left\| \frac{1}{1-a_i a_j^*} \right\|_{(r+q)\times(r+q)}, \qquad \mathbf{B} = \| b_{ij} \|_{(r+q)\times(r+q)},$$

причем

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant r \text{ или } 1 \leqslant j \leqslant r, \\ 1/(1-a_i a_j^*) — & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\gamma_{\max} = 1/\sqrt{\lambda_{\max}}$, где $\lambda_{\max}$ — максимальное из собственных чисел матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

Доказательство теоремы основывается на интерполяции в комплексной области некоторой аналитической функции $f_\gamma : \overline{D} \to \overline{D}$, такой, что $f_\gamma(a_i) = 0$, $i \in \{\overline{1, r}\}$ и $f_\gamma(a_g) = \gamma$, $g \in \{\overline{(r+1), (r+q)}\}$, и последующей оценке максимального значения $\gamma_{\max}$ величины γ. Следует отметить, что данный результат применим и в случае неустойчивых объектов.

В [23] формулируется интересный вывод для ситуации, когда $k_1 = k_2 = \ldots = k_p$, а объект не имеет матричных нулей и необщих полюсов. При этом всегда существует такой регулятор $R(s)$, который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы.

Что же касается вопроса о возможности обеспечения устойчивости системы управления объектом с произвольным числом интервальных параметров, то он пока остается открытым.

Анализ относительной устойчивости непрерывных интервальных систем. Линейная динамическая система считается относительно устойчивой, если все корни ее характеристического полинома локализованы в заданной области Λ комплексной плоскости. В частном случае область Λ может быть замкнутой[4, 5]. Понятие относительной устойчивости легко распространяется на случай интервальных систем, если иметь в виду разнообразные варианты расположения корней ИХП соответственно возможным сочетаниям варьируемых параметров в рамках фиксированных интервалов. Принадлежность полюсов интервальной системы некоторой желаемой области обусловливает тот или иной уровень робастного каче-

---

[4] *Gutman S., Jury E. I.* A general theory for motrix rootclustering in subregions of the complex plane // IEEE Trans. Automat Control. 1981. V. AC-26. № 4.

[5] *Vaidyanathan P. P., Mitra S. K.* A inified structural interpretation of some well-known Stubility test procedures for linear systems // Proc. IEEE. 1987. V. 15. № 4.

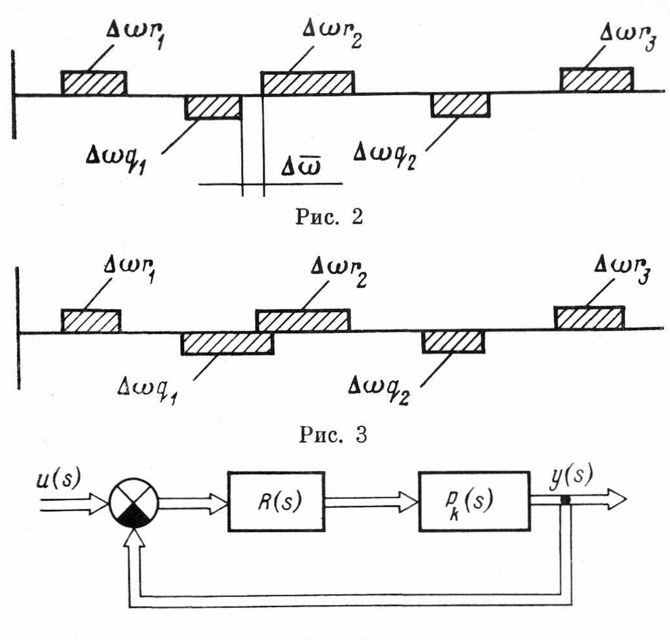


Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

ства управления. Необходимо отметить, что задача об относительной устойчивости ЛИДС имеет два аспекта:

1) определение условий, при которых корни ИХП будут лежать в наперед заданной области Λ;

2) приближенное нахождение границ области Λ, в которой гарантированно располагаются корни ИХП.

Процедуры решения задач рассматриваемого типа восходят к классическим методам (в частности, методам корневого годографа [6] и алгоритмам построения областей устойчивости для систем с большим коэффициентом усиления [7]); тем не менее можно считать, что трактовка вопроса, близкая к излагаемой в настоящей статье, появилась значительно позднее. К числу первых публикаций в этом направлении относятся работы [24, 25]. Существенное продвижение в проработке первого аспекта задачи об относительной устойчивости достигнуто в [26]. Данная работа, хотя и не посвящена исследованию систем с интервальными параметрами, в то же время содержит алгоритм, который позволяет найти условия расположения корней произвольного характеристического полинома в области Λ_0 комплексной плоскости (причем уравнение границы для Λ_0 также имеет полиномиальный вид). Алгоритм основан на теории линейных матричных уравнений и является в высокой степени формализованным. Будучи примененным к полиномам $f_1(s), \ldots, f_4(s)$ (10)–(13), фигурирующим в формулировке теоремы 2, он открывает возможность обеспечения желаемого расположения полюсов, также и интервальных систем.

Однако в собственно интервальной постановке задача об относительной устойчивости впервые была включена в публикацию [27] и впоследствии развита автором в работе [8]. Применительно к ИХП вида (7) обосновывается следующее утверждение, по сути дела являющееся обобщением теоремы 1 Харитонова.

Т е о р е м а 6. Пусть область Λ желаемого расположения корней ИХП (7) имеет ход, показанный на рис. 5 (здесь φ^*, η^*, ξ^* — заданные величи-

[6] *Удерман Э. Г.* Метод корневого годографа в теории автоматических систем. М.: Наука, 1972.

[7] *Мееров М. В.* Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. М.: Наука, 1967.

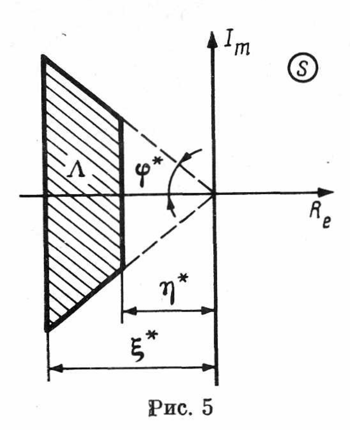


Рис. 5

ны). Обозначим J^n множество всех полиномов (7), корни которых лежат в Λ. В этом случае, для того чтобы $\Gamma^n \subset J^n$, необходимо и достаточно, чтобы $\Gamma_1{}^n \subset J_n$.

Обозначения Γ^n и $\Gamma_1{}^n$ поясняются в формулировке теоремы 1.

Справедливость теоремы 6 показывает, что для проверки факта принадлежности корней ИХП (7) области Λ (рис. 5) можно проанализировать в этом отношении 2^n полиномов с сосредоточенными коэффициентами, принимающими граничные значения из исходных интервалов. Такой процесс, безусловно, оказывается весьма трудоемким. Поэтому предлагается [8, 27] использовать достаточные условия, обеспечивающие выполнение интересующих нас требований. В частности, эффективными являются условия попадания корней ИХП в сектор, заданный углом $\pi \pm \varphi^*$ (рис. 5), основанные на достаточном критерии устойчивости Липатова — Соколова [8]. Эти условия имеют вид

$$\frac{\alpha_i{}^2}{\beta_{i-1}\beta_{i+1}} \geqslant \delta^*, \qquad i \in \{\overline{1, (n-1)}\}, \tag{19}$$

где α_i, β_i — по-прежнему границы интервала для коэффициента b_i ИХП (7), а δ^* — действительная функция величин n и φ^* (ее значения представлены на соответствующих номограммах [8]).

Аналогичный подход может быть применен и для проверки того факта, что действительные части корней ИХП не меньше ξ^* и не больше η^*. С этой целью первоначально осуществляется замена переменной s на $s+\xi^*$ (или на $s+\eta^*$) в выражении для $f(s)$ (7) (т. е. фактически реализуется метод Цыпкина — Бромберга [9]), после чего производится пересчет коэффициентов b_i' и b_i'', $i \in \{\overline{0, n}\}$ смещенных полиномов по информации о b_i согласно формулам

$$b_i' = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_{n-j}^{i-j} \xi^{*i-j} b_j, \qquad i \in \{\overline{0, n}\}, \tag{20}$$

$$b_i'' = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} C_{n-j}^{i-j} \eta^{*i-j} b_j, \qquad i \in \{\overline{0, n}\}. \tag{21}$$

Здесь C_{n-j}^{i-j} — число сочетаний из $(n-j)$ элементов по $(i-j)$.

Применительно к смещенным полиномам с помощью достаточных критериев записываются условия устойчивости (после зеркального отражения относительно мнимой оси — в случае полинома с коэффициентами (20), либо непосредственно — в случае полинома с коэффициентами (21)).

[8] *Липатов А. В., Соколов Н. И.* О некоторых достаточных условиях устойчивости линейных непрерывных стационарных систем // АиТ. 1978. № 9. С. 30–37.

[9] *Цыпкин Я. З., Бромберг П. В.* О степени устойчивости линейных систем // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1945. № 12.

На основе изложенного нетрудно построить алгоритм формирования относительно устойчивого ИХП, приведенный в [8, 27]. Он заключается в фиксации α_1, β_1 и последовательном нахождении границ интервалов коэффициентов при убывающих степенях s с использованием (19). В ситуациях, когда корни найденного таким образом полинома не соответствуют ограничениям с точки зрения ξ^* и η^*, производится корректировка интервалов коэффициентов путем их сдвига влево или вправо. В работах [28, 29] ставится задача установления взаимосвязи между размерами области Λ и соответствующего подпространства в пространстве варьируемых коэффициентов характеристического полинома. Последний первоначально записывается в форме (7), однако его коэффициенты $b_1^0, \ldots, b_n^0$ принимают фиксированные значения для некоторого номинального режима. Величины $b_1^0, \ldots, b_n^0$ задают определенную точку в пространстве указанных параметров. Необходимо построить гиперсферу наибольшего радиуса с центром в точке $(b_1^0, \ldots, b_n^0)$, отражающую допустимые изменения коэффициентов характеристического полинома, при которых его корни не выходят за пределы области Λ.

Для Λ делаются следующие допущения:

1) она расположена симметрично относительно действительной оси;

2) граница области Λ пересекает действительную ось только в двух точках: $x=\tau$, $x=\sigma$;

3) область Λ является односвязной, причем ее граница состоит из конечного числа сегментов $p_1, \ldots, p_l$, описываемых уравнениями вида

$$\varphi_k(x, y^2)=0; \quad k\in\{\overline{1, l}\}. \tag{22}$$

Обозначим $E_k(x)$ выражение x^2+y^2, из которого исключена переменная y путем решения одного из уравнений (22) для соответствующего k. Сформируем далее матрицы

$$\mathbf{\Phi}_k=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -2x & 1 & \ldots & 0 \\ E_k(x) & -2x & & 0 \\ 0 & E_k(x) & & 1 \\ 0 & 0 & & -2x \\ 0 & 0 & \ldots & E_k(x) \end{Vmatrix}_{n\times(n-2)}, \quad k\in\{\overline{1, l}\}$$

и векторы $\boldsymbol{\gamma}_k$, такие, что

$$\boldsymbol{\gamma}_k^{\mathrm{T}}=\|-2x, E_k(x), 0, \ldots, 0\|_{1\times n}, \quad k\in\{\overline{1, l}\}.$$

Кроме того, будем считать известными векторы $\mathbf{w}_{l+1}$ и $\mathbf{w}_{l+2}$, компоненты которых равны

$$\mathbf{w}_{l+1}^{\mathrm{T}}=\|\tau^{n-1}, \ldots, \tau, 1\|;$$

$$\mathbf{w}_{l+2}^{\mathrm{T}}=\|\sigma^{n-1}, \ldots, \sigma, 1\|.$$

Найдем величины d_k, $k\in\{\overline{1, (l+2)}\}$ согласно правилам

$$\begin{gathered} d_k^2=\min_x\{(\boldsymbol{\gamma}_k-\mathbf{b}^0)^{\mathrm{T}}(\mathbf{I}-\mathbf{\Phi}_k(\mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}_k)^{-1}\mathbf{\Phi}_k^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\gamma}_k-\mathbf{b}^0)\}, \quad k\in\{\overline{1, l}\}; \\ d_{l+1}=\boldsymbol{\eta}_{l+1}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}^0+\tau^n/[\mathbf{w}_{l+1}]; \\ d_{l+2}=\boldsymbol{\eta}_{l+2}^{\mathrm{T}}b^0+\sigma^n/[\mathbf{w}_{l+2}]. \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь $(\mathbf{b}^0)^T=\|b_1^0, \ldots, b_n^0\|$; I — единичная матрица размера $(n\times n)$; $\boldsymbol{\eta}_{l+1}$ и $\boldsymbol{\eta}_{l+2}$ — векторы с единичными модулями, совпадающие по направлению с $\mathbf{w}_{l+1}$ и $\mathbf{w}_{l+2}$ соответственно; $[\cdot]$ обозначает евклидову норму.

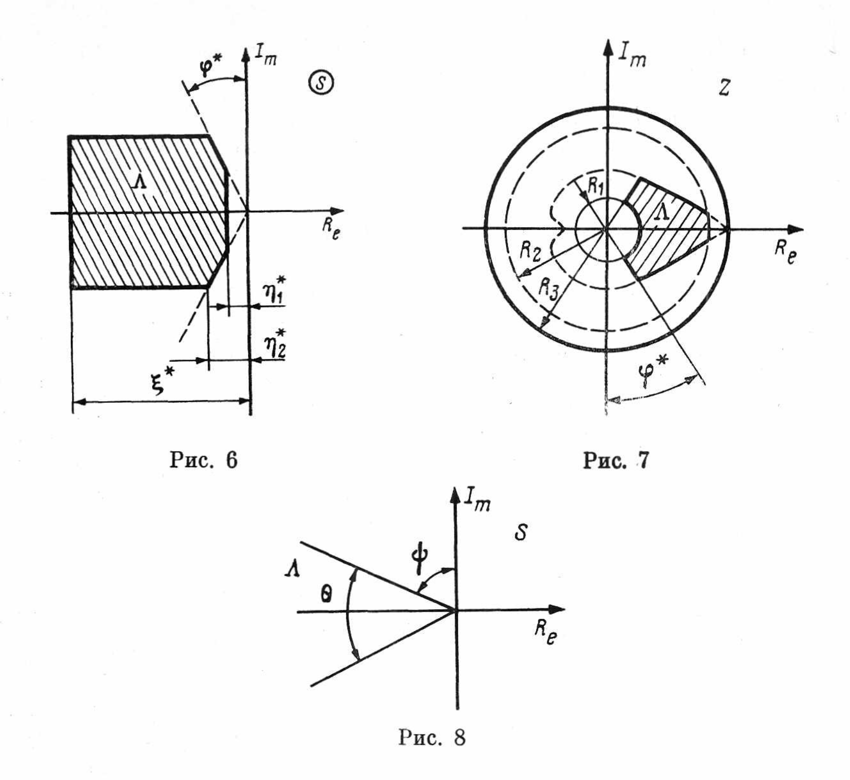


Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

С использованием введенных объектов формулируется следующее утверждение [29].

Теорема 7. Наибольшая гиперсфера с центром в точке $(b_1^0, b_2^0, \ldots, b_n^0)$ пространства коэффициентов характеристического полинома, корни которого принадлежат области Λ комплексной плоскости, имеет радиус R, определяемый соотношением

$$R^2 = \min\{d_1^2, \ldots, d_{l+2}\},$$

где d_k, $k \in \{\overline{1, (l+2)}\}$ задаются равенствами (23).

Данная теорема доказывается на основе ряда геометрических построений, в процессе которых d_k, $k \in \{\overline{1, (l+2)}\}$ принимают смысл кратчайших расстояний от точки $(b_1^0, \ldots, b_n^0)$ до гиперповерхностей, ограничивающих области пространства параметров в соответствии с сегментами $p_1, p_2, \ldots, p_l$ на комплексной плоскости, а также до гиперплоскостей, обусловленных равенствами $f(\tau)=0$ и $f(\sigma)=0$.

Предложенный подход обобщается на случай, когда в пространстве параметров формируется не гиперсфера, а гиперконус. Укажем здесь, что подобный путь получения условий принадлежности корней ИХП заданной области Λ (построение геометрического тела, аппроксимирующего «допустимое» подпространство в пространстве параметров) демонстрируется в значительном числе работ. Например, в [30] можно найти рассмотрение случая, когда область Λ имеет вид, показанный на рис. 6 (для непрерывных систем) или на рис. 7 (для дискретных систем), а аппроксимирующее тело представляет собой n-мерный параллелепипед. Область Λ на рис. 6 ограничивается ломаной линией, а на рис. 7 — дугами окружностей и логарифмических спиралей, отрезками прямых. В обоих этих вариантах Λ односвязна.

Начиная с [31], основная часть публикаций, посвященных первому аспекту задачи об относительной устойчивости ЛИДС, оперирует с результатами В. Л. Харитонова.

Так, если обозначить K_1^n — семейство полиномов вида (14) с коэффициентами (15), причем b_k принимает значение либо α_k, либо β_k, $k\in\{\overline{0, n}\}$, c_k принимает значение либо γ_k, либо δ_k, $k\in\{\overline{0, n}\}$, а также обозначить $H^n(\Lambda)$ — семейство полиномов (14), корни которых лежат в области Λ (открытый сектор рис. 8), то можно записать следующее обобщение теоремы 1 [31].

Теорема 8. Для того чтобы $K^n\subset H^n(\Lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы $K_1^n\subset H^n(\Lambda)$.

Частными случаями теоремы 8 являются аналогичные утверждения, которые касаются полиномов с действительными коэффициентами ($c_k\equiv 0$, $k\in\{\overline{0, n}\}$) и секторов, вырождающихся в действительную полуось.

Дальнейшее развитие подходов [31] дает возможность исследовать относительную устойчивость интервальных систем с помощью приложений теоремы 3 [32]. При этом рассматриваются множество Γ^n полиномов вида (7) и множество J^n таких полиномов, корни которых лежат в Λ (рис. 8). Записывается вспомогательный полином (14) с комплексными интервальными коэффициентами $p_k=d_k+jc_k$, $k\in\{\overline{0, n}\}$, где

$$d_k\in[\min(\alpha_k\cos k\psi,\ \beta_k\cos k\psi),\ \max(\alpha_k\cos k\psi,\ \beta_k\cos k\psi)],\quad k\in\{\overline{0, n}\}; \tag{24}$$

$$c_k\in[\min(\alpha_k\sin k\psi,\ \beta_k\sin k\psi),\ \max(\alpha_k\sin k\psi,\ \beta_k\sin k\psi)],\quad k\in\{\overline{0, n}\}. \tag{25}$$

В свою очередь α_k, β_k — границы интервалов коэффициентов исходного ИХП (7). Применительно к полиному (14) с коэффициентами (24), (25) формируются выражения для $h_1(\omega), \ldots, h_4(\omega)$ и $g_1(\omega), \ldots, g_4(\omega)$, фигурирующих в теореме 3. Все это позволяет привести формулировку теоремы 9 [32].

Теорема 9. Для того чтобы $\Gamma^n\subset J^n$, достаточно, чтобы восемь полиномов, заданных парами (h_1, g_1), (h_1, g_2), (h_2, g_1), (h_2, g_2), (h_3, g_3), (h_3, g_4), (h_4, g_3), (h_4, g_4), лежали в H^n.

Доказательство базируется на преобразовании, связанном с постановкой в (7) $s=e^{-j\psi}w$, где w — новая комплексная переменная. Данное преобразование соответствует повороту мнимой оси на угол $-\psi$, что создает предпосылки для сведения задачи об относительной устойчивости ЛИДС к стандартной задаче об ее асимптотической устойчивости.

В [32] также дается модификация теоремы 9 для случая, когда в качестве исходного ИХП рассматривается не полином (7), а полином (14).

Рассмотрению второго аспекта задачи об относительной устойчивости ЛИДС посвящены [33, 34]. Построение области Λ гарантированного расположения корней ИХП (7) опирается на информацию о номинальных значениях $b_1^0, \ldots, b_n^0$ его коэффициентов и на данные относительно области U_b их изменения в пространстве E_b указанных переменных.

Пусть $s=\lambda$ — некоторый действительный корень полинома (7). Подставив его в выражение (7), получим уравнение

$$\lambda^{n-1}b_1+\lambda^{n-2}b_2+\ldots+\lambda b_{n-1}+b_n+\lambda^n=0,$$

определяющее в пространстве E_b $(n-1)$-мерную гиперплоскость Γ_λ, соответствующую множеству полиномов, имеющих корень λ. Фактически для существования полиномов с коэффициентами из U_b, имеющих корень λ, необходимо и достаточно, чтобы гиперплоскость Γ_λ проходила через область U_b (т. е. $\Gamma_\lambda\cap U_b\neq\varnothing$). Для проверки отмеченного факта достаточно определить, лежат ли все точки U_b, заданные сочетаниями «экстремальных» значений переменных b_i, $i\in\{\overline{1, n}\}$ (т. е. α_i или β_i), по одну сторону от Γ_λ.

Перемещая корень λ по действительной оси комплексной плоскости, на этой оси можно получить участки расположения действительных корней всех полиномов с коэффициентами из области U_b.

Аналогичные построения можно выполнить и для каждой пары комплексно-сопряженных корней $s_{1,2}=\mu\pm j\eta$, предварительно записав уравнения

$$\operatorname{Re}(\mu+j\eta)^{n-1}b_1+\ldots+\mu b_{n-1}+b_n+\operatorname{Re}(\mu+j\eta)^n=0,$$
$$\operatorname{Im}(\mu+j\eta)^{n-1}b_1+\ldots+\eta b_{n-1}+\operatorname{Im}(\mu+j\eta)^n=0.$$

Эти уравнения определяют в пространстве E_b $(n-2)$-мерную гиперплоскость $\Gamma_{\mu\eta}$. Для наличия у полиномов (7) отмеченной пары корней необходимо и достаточно, чтобы имело место пересечение U_b с $\Gamma_{\mu\eta}$.

Из сказанного вытекает [34], что для построения области Λ нет необходимости сканировать всю комплексную плоскость. Достаточно задать номинальную точку $(b_1^0, \ldots, b_n^0)\in U_b$, вычислить соответствующие ей корни s_j^0 $(j\in\{\overline{1, n}\})$ полинома (7), а затем около каждого корня построить односвязную область с применением методов слежения вдоль границы[10], где критерием нахождения точки в искомой области являются условия $\Gamma_\lambda\cap U_b=\varnothing$ или $\Gamma_{\mu\eta}\cap U_b\neq\varnothing$. Что же касается всей области Λ, то она получается многосвязной.

Важно указать, что общность метода [33, 34] позволяет применять его в задачах, для которых интервальные ограничения заданы не применительно к параметрам характеристического полинома, а непосредственно по отношению к элементам матриц, фигурирующих в уравнениях состояния.

Из сказанного в данном разделе обзора вытекает наличие следующего противоречия в текущем состоянии вопроса: условия попадания корней ИХП в определенную область комплексной плоскости пока найдены только для случаев, когда эта область односвязная. В то же время для ИХП с интервальными коэффициентами фактическая область расположения корней — чаще всего многосвязная. Данный факт целесообразно учитывать при разработке новых методов и алгоритмов.

Анализ устойчивости интервальных характеристических полиномов дискретных систем. Свободное движение линейной дискретной системы может быть описано совокупностью разностных уравнений вида

$$\mathbf{x}(k+1)=\mathbf{A}\mathbf{x}(k), \quad k=0, 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

где $\mathbf{x}(k)$ — n-мерный вектор координат состояния, $\mathbf{A}=\|a_{ij}\|_{n\times n}$ — матрица с действительными элементами размера $(n\times n)$. Аналогично ситуации с непрерывными системами здесь, используя z-преобразование, сформируем характеристический полином

$$f(z)=\det(z\mathbf{I}-\mathbf{A})=\sum_{i=0}^{n} b_i z^{n-i}. \tag{27}$$

В соотношении (27) $\mathbf{I}$, как и раньше,— единичная матрица; b_i, $i\in\{\overline{0, n}\}$ — действительные коэффициенты.

Линейная дискретная система (26) будет устойчива, если все корни полинома $f(z)$ (27) лежат в круге единичного радиуса с центром в начале координат комплексной плоскости.

Применительно к ЛИДС величины b_i, $i\in\{\overline{0, n}\}$ представляют собой интервальные числа

$$b_i\in[\alpha_i, \beta_i], \quad \alpha_i\leqslant b_i\leqslant\beta_i, \quad i\in\{\overline{0, n}\}. \tag{28}$$

Поэтому и задача об устойчивости такой системы понимается в интервальном смысле: при всех произвольных сочетаниях значений параметров из интервалов (28) корни ИХП (27) должны находиться в указанной области комплексной плоскости. Возникает естественный вопрос: не при-

[10] Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления/Под ред. *А. А. Воронова* и *И. А. Орурка*. М.: Наука, 1984.

менимы ли для решения этой задачи теоремы 1 и 2 Харитонова? К сожалению, ответ на этот вопрос в общем случае получается отрицательным. о чем свидетельствуют убедительные контрпримеры [35, 36]. Исключение составляют ИХП (27) с $n=2$ и $n=3$ при $\alpha_0=\beta_0=1$. Как показано в [36, 37], для таких полиномов выполняется теорема 1. Что же касается теоремы 2, то при $n=3$ ее применение приводит к неверным результатам. Таким образом, об устойчивости (27) при $n=3$ и $\alpha_0=\beta_0=1$ можно судить только по свойствам $2^3=8$ полиномов с сосредоточенными коэффициентами [36].

Преодоление возникающих таким образом трудностей ведется по трем направлениям.

Первое направление [35, 38] связано с использованием билинейного преобразования

$$w=\frac{z+1}{z-1}. \tag{29}$$

В рамках этого направления ИХП (27) предварительно переписывается в виде

$$f(z)=\sum_{i=0}^{n} c_i (z+1)^{n-i}(z-1)^{i}, \tag{30}$$

где коэффициенты c_i также имеют интервальный смысл ($c_i\in[\gamma_i, \delta_i]$, $\gamma_i\leqslant\delta_i$, $i\in\{\overline{0, n}\}$), причем пределы γ_i, δ_i зависят от α_i, β_i.

Подстановка (29) в (30) дает

$$f(w)=\sum_{i=0}^{n} c_i w^{n-i}. \tag{31}$$

Ввиду того что преобразование (29) отображает внутренность круга единичного радиуса в левую половину комплексной плоскости, можно утверждать, что устойчивость ИХП (27) дискретной системы будет следовать из асимптотической устойчивости интервального полинома (31). В свою очередь для исследования устойчивости полинома $f(w)$ применимы любые подходы, развитые для линейных непрерывных систем, в том числе и теоремы 1, 2.

Недостатком данной группы методов является тот факт, что переход от коэффициентов b_i, $i\in\{\overline{0, n}\}$ в (27) к коэффициентам c_i, $i\in\{\overline{0, n}\}$ в (31) влечет за собой пересчет границ соответствующих интервалов по правилам интервальной арифметики (2)—(5), т. е. происходит огрубление результатов вычислений. Фактически применение теорем Харитонова к ИХП (31) дает только достаточные условия устойчивости ИХП (27).

Второе направление, представленное, например, в [39], предполагает, что формируются достаточные условия устойчивости ИХП дискретной системы, ориентированные непосредственно на запись полинома $f(z)$ (27). В [39] предполагается вычислять вспомогательные величины

$$q_{ij}=\sum_{r=0}^{i-1}(-1)^r C_r^{j-1} C_{i-r}^{n+1-j}; \qquad i, j\in\{\overline{1, (n+1)}\},$$

и далее

$$\delta_r=\sum_{j=1}^{n+1} q_{r+1,j}\sigma_{j-1}, \qquad r\in\{\overline{0, n}\},$$

где

$$\sigma_{j-1}=\begin{cases}\alpha_{j-1}, & \text{если} \quad q_{r+1,j}<0,\\ \beta_{j-1}, & \text{если} \quad q_{r+1,j}>0,\end{cases}$$

а также

$$\gamma_r = \sum_{j=1}^{n+1} q_{r+1,j}\rho_{j-1}, \qquad r\in\{\overline{0, n}\},$$

где

$$\rho_{j-1} = \begin{cases} \beta_{j-1}, & \text{если} \quad q_{r+1,j}>0, \\ \alpha_{j-1}, & \text{если} \quad q_{r+1,j}<0. \end{cases}$$

Тогда для устойчивости ИХП (27), достаточно, чтобы выполнялась совокупность неравенств

$$\delta_{i-1}\delta_{i+2}\leqslant 0{,}4655\gamma_i\gamma_{i+1}, \quad i\in\{\overline{1, (n-2)}\}.$$

Доказательство приведенного утверждения [39] базируется на преобразовании (29) и, кроме того, на достаточных условиях устойчивости Липатова — Соколова. Отметим, что аналогичный подход может использоваться и при анализе свойств непрерывных систем [40], однако там достаточный критерий устойчивости (при наличии теорем о необходимых и достаточных условиях) играет меньшую роль.

Третье направление предусматривает исследование различных частных случаев ИХП (27). Здесь в первую очередь представляет интерес следующий результат [35].

Теорема 10. Пусть задан полином $f(z)$ (27) порядка n, причем $\alpha_i=\beta_i$ при $i\in\{\overline{0, (n/2-1)}\}$ (для n — четного) или при $i\in\{\overline{0, (n-1)/2}\}$ (для n — нечетного). Тогда необходимые и достаточные условия устойчивости системы с ИХП $f(z)$ содержатся в формулировке теоремы 1.

Обоснование приведенного результата во многом сходно с доказательством теоремы 1.

Получен также ряд выводов относительно устойчивости полиномов $f(z)$ для конкретных значений $n\leqslant 5$. Как уже упоминалось, в случае $\alpha_0=\beta_0=1$ и $n=2$ или $n=3$ для анализа свойств ИХП дискретной системы можно пользоваться теоремой 1. При $\alpha_0<\beta_0$ ($n=2$ или $n=3$) также необходимые и достаточные условия устойчивости ИХП (27), однако с целью их применения следует предварительно решить задачу об определении дополнительных сочетаний параметров ИХП, для которых проверяется расположение его корней (кроме сочетаний, фигурирующих в формулировке первой теоремы Харитонова) [37]. Применительно к ситуации $\alpha_0=\beta_0=1$, $n=4$ и $n=5$ имеют место приведенные ниже утверждения.

Теорема 11. ИХП $f(z)$ при $n=4$ и $\alpha_0=\beta_0=1$ устойчив тогда и только тогда, когда устойчивы 16 полиномов, фигурирующих в формулировке теоремы 1, и, кроме того, имеет место устойчивость всех дополнительных полиномов с коэффициентами, соответствующими сочетанию (b_1^*, b_2, b_3, b_4), где

$$b_i\in[\alpha_i, \beta_i], \qquad i\in\{\overline{2, 4}\}, \qquad b_1^* = \frac{b_3}{2b_4}(1+b_4),$$

причем удовлетворяются неравенства

$$b_4<0, \quad \alpha_1<b_1^*<\beta_1.$$

Теорема 12. ИХП $f(z)$ при $n=5$ и $\alpha_0=\beta_0=1$ устойчив тогда и только тогда, когда устойчивы 32 полинома, фигурирующие в формулировке теоремы 1, и, кроме того, имеет место устойчивость всех дополнительных полиномов с коэффициентами, соответствующими сочетанию (b_1^*, b_2, b_3, b_4, b_5), где $b_i\in[\alpha_i, \beta_i]$, $i\in\{\overline{2, 5}\}$; $b_1^* = \dfrac{\beta_1^* + \operatorname{sign}(b_5)\sqrt{D^*}}{3b_5}$;

$$D^*=\beta_1^{*2}-3b_5\beta_2^*; \quad \beta_1^*=b_4+b_3b_5+b_5^2;$$
$$\beta_2^*=2b_4b_5-b_5^3+b_5-b_4^2b_5+2b_5^2b_3+b_3b_4+b_3+$$
$$+b_2b_4b_5-3b_2b_5,$$

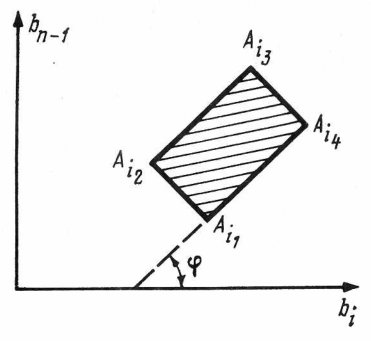


Рис. 9

причем выполняются неравенства

$$D^*>0, \quad \alpha_1<b_1^*<\beta_1.$$

На практике пользоваться теоремами 11 и 12 удается лишь в тех задачах, где при исследовании характеристического полинома к интервальным числам относят один или два коэффициента.

В работе [41] ставится цель обобщения результатов вышеизложенного третьего направления по разработке методов анализа устойчивости дискретных ЛИДС. В частности, в [41] доказана следующая теорема.

Теорема 13. Пусть полином (27) записан в виде

$$f(z)=\sum_{i=0}^{n} b_{n-i}z^i. \tag{32}$$

Положим, что для каждого $i\neq n/2$ b_i, b_{n-i} принимают значения из замкнутой области, показанной на рис. 9, где φ составляет 45°. В этом случае ИХП $f(z)$ устойчив тогда и только тогда, когда устойчивы полиномы, коэффициенты которых соответствуют всевозможным сочетаниям значений для «угловых» точек $A_{i_1}, \ldots, A_{i_4}$, $i\in\{\overline{0,\ n}\}$ (при n — четном в сочетания включаются границы интервала варьирования $b_{n/2}$, т. е. $\alpha_{n/2}$, $\beta_{n/2}$).

Теорема 13 содержит модификацию подхода Харитонова применительно к ситуации, когда ребра параллелепипеда ограничения параметров не параллельны осям координат. В [41] исследованы также варианты, при которых $\varphi=90$ и 135°. На основании отмеченных исследований предложен ряд наглядных достаточных условий устойчивости ИХП (32).

Завершая раздел, отметим еще один конструктивный подход, складывающийся в последнее время в области анализа интервальных систем и имеющий перспективу дать полезные результаты для дискретных ЛИДС. Это — путь формирования и исследования полиномиальных политопов [42—44]. Определение политопа дается следующим образом [44].

Пусть имеются m полиномов $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ n-го порядка с действительными коэффициентами (при этом коэффициент при старшей степени комплексной переменной z полагается равным единице). Введем в рассмотрение множество P полиномов $p(z)$, формируемых с использованием $f_i(z)$, $i\in\{\overline{1,\ m}\}$ и действительных величин $\lambda_i\in[0,\ 1]$, $i\in\{\overline{1,\ m}\}$ согласно правилу

$$P=\left\{p(z)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i(z): \lambda_i\in[0,1],\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1\right\}. \tag{33}$$

В этом случае P называется полиномиальным политопом, а $f_i(z)$, $i\in\{\overline{1,\ m}\}$ — вершинами указанного политопа.

Под ребром политопа P понимается выпуклая комбинация каких-либо двух его вершин, а под открытым ребром — результат пересечения P с некоторой координатной гиперплоскостью в пространстве рассматриваемых полиномов.

Запишем далее преобразование $T: C^* \to C^*$, заданное соотношением

$$z = T(w) = \frac{sw+q}{xw+y}, \tag{34}$$

где $C^* = C \cup \{\infty\}$ (C — поле комплексных чисел), s, q, x, y — действительные числа, причем $sy - qx \neq 0$.

Отображение T представляет собой биекцию; обратное преобразование:

$$w = T^{-1}(z) = (-yz+q)/(xz-s).$$

Для некоторого произвольного полинома

$$f_{(z)}^{(k)} = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n$$

с действительными коэффициентами b_i, $i \in \{\overline{0,\ n}\}$ $(b_0 > 0)$ выполним преобразование (34), в результате получим

$$f^{(T_k)}(w) = \sum_{i=0}^{n} b_i (sw+q)^{n-i} (xw+y)^i = \sum_{i=0}^{n} c_i w^{n-i}. \tag{35}$$

Здесь c_i, $i \in \{\overline{0,\ n}\}$ — найденные после преобразования коэффициенты.

Матрица $\mathbf{H}(f^{(T_k)})$, которая составляется для проверки устойчивости полинома (35) по критерию Гурвица, имеет вид

$$\mathbf{H}(f^{(T_k)}) = \begin{Vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_0 & c_2 & c_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_1 & c_3 & c_5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & c_0 & c_2 & c_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_n & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}.$$

С учетом сказанного, имеют место нижеперечисленные результаты [42—44].

Теорема 14. Пусть Λ — односвязная область в комплексной плоскости. Корни элементов политопа (33) содержатся в Λ тогда и только тогда, когда корни всех открытых ребер этого политопа содержатся в Λ.

Теорема 15. Выпуклая комбинация $\lambda f_0(w) + (1-\lambda) f_1(w)$, $\lambda \in [0,\ 1]$ двух полиномов $f_0(w)$ и $f_1(w)$ порядка n (причем необязательно, чтобы коэффициенты при их старших степенях равнялись единице) имеет корни только в левой половине комплексной плоскости тогда и только тогда, когда

1) $f_0(w)$ имеет корни только в левой полуплоскости;

2) $\mathbf{H}^{-1}(f_0)\mathbf{H}(f_1)$ не имеет собственных чисел в полуинтервале $(-\infty,\ 0]$.

Теорема 16. Пусть задан политоп P с вершинами $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots$ $\ldots, f_m(z)$ и билинейное преобразование $T(w)$ вида (34), которое переводит левую половину комплексной плоскости для переменной w в область Λ_T для переменной z. Можно утверждать, что область расположения корней элементов политопа P является вложением области Λ_T тогда и только тогда, когда:

1) все полиномы $f^{(T_1)}(w), \ldots, f^{(T_m)}(w)$, полученные в результате T-преобразования, имеют порядок n, а их коэффициенты при старших степенях w — одинаковые знаки;

2) для каждой пары вершин $f^{(T_l)}(w)$ и $f^{(T_j)}(w)$, полученных в результате T-преобразования, выполняется набор требований теоремы 15, т. е.

$f^{(T_i)}(w)$ не имеет корней в правой полуплоскости, и $\mathbf{H}^{-1}(f^{(T_i)})\mathbf{H}(f^{(T_j)})$ не собственных чисел в полуинтервале $(-\infty, 0]$.

Применение теорем 14—16 целесообразно осуществлять для двух вариантов преобразования $T(w)$:

1) $T(w)=(w+1)/(w-1)$, что фактически соответствует формуле (29);

2) $T(w)=\mu(w+1)/(w-1)$, $\mu>0$ (в такой ситуации область Λ_T будет соответствовать тем вариантам ЛИДС, для которых ширина полосы пропускания не превышает μ [44]).

Достоинства отмеченного подхода обусловили попытки некоторых исследователей распространить понятие политопа и на случай, когда ЛИДС описывается уравнениями состояния с интервальными матрицами [42, 45]. Тем не менее решение задач, связанных с анализом свойств политопов от матриц, как и вообще интервальных матриц, натолкнулось на значительные трудности. О них будет говориться в последующих разделах обзора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moore R. E.* Interval Analysis. Englewood Cliffs. N. Y.: Prentice-Hall, 1966.
2. *Шокин Ю. И.* Интервальный анализ. Новосибирск: Наука, 1981. 112 с.
3. *Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986.
4. *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления/Пер. с англ. М.: Мир, 1987.
5. *Харитонов В. Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 11.
6. *Yeung K. S., Wang S. S.* A simple proof of Kharitonov's theotem // IEEE Trans. on Automatic Control. 1987. V. AC-32. N 9.
7. *Lin H., Hollot C. V., Bartlett A. C.* Stability of families of polynomials: deometric consideration in coefficient space // Int. J. Contr. 1987. V. 45. N 2.
8. *Хлебалин Н. А.* Аналитический синтез регуляторов в условиях неопределенности параметров объекта управления: Дис. канд. техн. наук. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1984.
9. *Anderson B. D. O., Jury E. I., Mansour M.* On robust Hurwitz Polynomials // IEEE Trans. on Automatic Control. 1987. V. AC-32. N 10.
10. *Ахмеджанов Ф. М., Крымский В. Г., Тляшов Р. З., Челышев С. Ю.* Об устойчивости динамических систем с интервальными характеристическими полиномами.– Деп в ВИНИТИ, 1989. № 7505–В89.
11. *Харитонов В. Л.* К проблеме Рауса – Гурвица для семейства полиномов // Проблемы устойчивости движения аналитической механики и управления движением. Новосибирск: Наука, 1979.
12. *Bose N. K., Shi Y. Q.* A simple general proof of Kharitonov's generalized stability criterion // IEEE Trans. Circuits Syst. 1987. V. CAS-34. N 10.
13. *Yeung K. S.* Linear system stability under parameter uncertainies // Int. J. Control. 1983. V. 38. N 2.
14. *Guiver J. P., Bose N. K.* Strictly Hurwitz property invariance of quartics under coefficient perturbation // IEEE Trans. on Autom. Control. 1983. V. AC-28. N 1.
15. *Marmish B. R.* Invariance of the strict Hurwitz property for polynomials with perturbed coefficients // IEEE Transactions on Autom. Control. 1984. V. AC-29. N 10.
16. *Bialas S., Garloff J.* Stability of polynomials under coefficient perturbations // IEEE Trans. on Autom. Control. 1985. V. AC-30. N 3.
17. *Kim K. D., Bose N. K.* Invariance of the strict Hurwitz property for bivariate polynomials under coefficient perturbations // IEEE Trans. on Automatic Control. 1988. V. AC-33. N 12.
18. *Argoun M. B.* Allowable coefficient perturbations with preserved stability of a Hurwitz polynomial // Int. J. Control. 1986. V. 44. N 4.
19. *Argoun M. B.* Stability of a Hurwitz polynomial under coefficient perturbations: necessary and sufficient conditions // Int. J. Control. 1987. V. 45. N 2.
20. *Argoun M. B.* Frequency domain conditions for the stability of perturbed polynomials / IEEE Trans. on Automat. Control. 1987. V. AC-32. N 10.
21. *Mori Takehiro, Kokame Hideki.* On extended Kharitonov's theorems // Trans. Soc. Instrum. and Contr. Eng. 1989. V. 25. N 1.
22. *Tannenbaum A.* Feedback stabilization of plants with uncertainty in the gain factor // Int. J. Control. 1980. V. 32. N 1.
23. *Tannenbaum A.* On the multivariable gain margin problem // Automatica. 1986. V. 22. N 3.
24. *Ackermann J.* Parameter space design of robust control systems // IEEE Trans. on Autom. Control. 1980. V. AC-25. N 5.

25. *Липатов А. В., Голубничная Т. Ф.* Суждение об устойчивости нестационарных систем одного класса по устойчивости множества «замороженных» систем // Вопросы исследования систем управления. М.: МАИ, 1980.
26. *Харитонов В. Л.* Задача распределения корней характеристического полинома автономной системы // АиТ, 1981. № 5.
27. *Хлебалин Н. А.* Построение интервальных полиномов с заданной областью расположения корней // Аналитические методы синтеза регуляторов. Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1982.
28. *Soh C. B., Berger C. S., Dabke K. P.* On the stability properties of Polynomials with perturbed coefficients // IEEE Trans. on Autom. Control. 1985. V. AC-30. N 10.
29. *Soh C. B., Berger C. S., Dabke K. P.* Addendum to «On the stability properties of polynomials with perturbed coefficients» // IEEE Trans. on Autom. Control. 1987. V. AV-32. N 3.
30. *Vicino A.* Robustness of pole location in perturbed systems // Automatica. 1989. V. 25. N 1.
31. *Soh C. B., Berger C. S.* Damping margins of polynomials with perturbed coefficients // IEEE Trans. on Autom. Control. 1988. V. AC-33. N 5.
32. *Soh C. B., Berger C. S.* Damping ratio of polynomials with perturbed coefficients // IEEE Trans. on Autom. Control. 1988. V. AC-33. N 12.
33. *Сиразетдинов Р. Т.* К построению гарантированной области расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы // Изв. вузов. Авиац. техника. 1984. № 4.
34. *Сиразетдинов Р. Т.* Построение гарантированной области расположения нулей и полюсов передаточных функций динамических систем // АиТ. 1988. № 7.
35. *Hollot C. V., Bartlett A. C.* Some discrete-time counterparts to Kharitonov's stability criterion for uncertain systems // IEEE Trans. on Autom. Control. 1986. V. AC-31. N 4.
36. *Cieslik J.* On possiblities of the extension of Kharitonov's stability test for iinterval polynomials in the discrete-time case // IEEE Trans. on Autom. Control. 1987. V. AC-32. N 3.
37. *Kraus F. J., Anderson B. D. O., Jury E. I., Mansour M.* On the robustness of low-order Schur polynomials // IEEE Trans. on Autom. Control. 1988. V. 35. N 5.
38. *Bose N. K., Jury E. I., Zeheb E.* On robust Hurwitz and Schur polynomials // Proc. IEEE 25th Conf. on Decision and Control. Athens. 1986.
39. *Bose N. K., Jury E. I., Zeheb E.* On robust Hurwitz and Schur Polynomials // IEEE Trans. on Autom. Control. 1988. V. AC-33. N 12.
40. *Faxun Liang.* Simple criteria for stability interval polynomials // Int. J. Control. 1989. V. 50. N 1.
41. *Kraus F., Anderson B. D. O., Mansour M.* Robust Schur polynomial stability and Kharitonov's theorem // Int. J. Control. 1988. V. 47. N 5.
42. *Bialas S.* A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials and matrices // Bull. Polish Acad. Sci. Techn. Sci. 1985. V. 33. N 9-10.
43. *Bartlett A. C., Hollot C. V., Lin H.* Root location of an entire polytope polynomials: it suffices to check the edges // Proc. Amer. Contr. Conf. Minneapolis: MN, 1987.
44. *Bartlett A. C., Hollot C. V.* A necessary and sufficient condition for Schur invariance and generalized stability of polytopes and polynomials // IEEE Trans. on Autom. Control. 1988. V. AC-33. N 6.
45. *Barmish B. R., Fu M., Saleh S.* Stability of a polytope of matrices: counterexamples // IEEE Trans. on Autom. Control. 1988. V. 33. N 6.

Москва

Поступила в редакцию
10.II.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УДК 62-50

А. П. КРИЩЕНКО, В. И. КУШНАРЕВ, А. Н. НАЗАРЕНКО,
С. Б. ТКАЧЕВ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

На основе дифференциально-геометрического подхода для нелинейных динамических систем, линейных по управлению, приводятся алгоритмы численно-аналитических процедур преобразования к каноническому виду, декомпозиции, оценивания и построения экспоненциального наблюдателя. Предложенные методы позволяют решать задачи анализа структурных свойств (управляемость, наблюдаемость) и задачи синтеза алгоритмов управления.

Введение. В последние 10—15 лет активно развивается та область исследований нелинейных динамических систем с управлением, которая использует дифференциально-геометрический подход [1—17]. Основан этот подход на идеях, методах и, конечно, техническом аппарате дифференциальной геометрии. Этот раздел математики существенно отличается от тех ее разделов (например, теории матриц, линейной алгебры, теории систем линейных дифференциальных уравнений, функционального анализа), которые составляют основу математического аппарата в исследованиях по линейным системам. Но здесь важно отметить следующее: хотя большая часть результатов из теории нелинейных систем получена авторами благодаря использованию аппарата дифференциальной геометрии, все же они, как правило, допускают эквивалентные формулировки на векторно-матричном языке. Это делает результаты нелинейной теории систем доступными для широкого круга специалистов в области управления нелинейными динамическими системами. Однако использовать эти результаты для исследования и разработки алгоритмов управления конкретными нелинейными объектами удается достаточно редко. Связано это с тем, что из-за нелинейного характера большинство результатов качественные и представляют собой утверждения типа теорем существования. Даже если имеется конструктивный результат, то получить его без привлечения численных методов удается лишь в отдельных случаях. Это говорит о необходимости развития численных методов, реализующих дифференциально-геометрический подход к проблемам нелинейной теории управления.

В рамках разработки таких методов в данной работе для нелинейных систем излагаются численные процедуры преобразования к каноническому виду, декомпозиции, оценивания и построения экспоненциальных наблюдателей. Приводится общая схема синтеза алгоритма управления, использующая указанные численные процедуры.

Изложение построено следующим образом: сначала приводятся основные результаты на дифференциально-геометрическом языке, затем дается их векторно-матричная интерпретация и, наконец, строятся алгоритмы численных процедур.

1. Канонический вид. Рассмотрим аффинную управляемую динамическую систему (АУДС) с многомерным управлением, т. е. систему вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{B}_j(\mathbf{x}) u_j, \ \mathbf{x} \in R^n, \dot{(\cdot)} = d(\cdot)/dt, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}=(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — управления, $\mathbf{A}(\mathbf{x})=(a_1(\mathbf{x}), \ldots, a_n(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{B}_j(\mathbf{x})= =(b_{1j}(\mathbf{x}), \ldots, b_{nj}(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}$, и пусть

$$w_j=h_j(\mathbf{x}), \quad j=1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

— выход АУДС (1.1). Для простоты будем считать, что все функции

$$a_i(\cdot), \quad b_{ij}(\cdot), \quad h_j(\cdot) \in C^\infty(\Omega), \tag{1.3}$$

где Ω — открыто, $\Omega \subset R^n$ и является множеством допустимых состояний АУДС (1.1).

Среди АУДС (1.1) выделим системы канонического вида. По определению, это есть АУДС, которые в переменных $(z_1, \ldots, z_n)=\mathbf{z}$ имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{z}_1=z_2, \ldots, \dot{z}_{n_1-1}=z_{n_1}, \ \dot{z}_{n_1}=f_1(\mathbf{z})+\sum_{j=1}^{m} g_{1j}(\mathbf{z}) u_j, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{z}_{n_1+\ldots+n_{m-1}+1}=z_{n_1+\ldots+n_{m-1}+2}, \ldots, \dot{z}_n=f_m(\mathbf{z})+\sum_{j=1}^{m} g_{mj}(z)\mathbf{u}_j,\end{gathered} \tag{1.4}$$

где $n_1+\ldots+n_m=n$. Если ввести фазовые переменные, то (1.4) можно записать в виде системы из m дифференциальных уравнений

$$y_i^{(n_i)} = f_i(\bar{\mathbf{y}})+\sum_{j=1}^{m} g_{ij}(\bar{\mathbf{y}}) u_j, \qquad i=1, \ldots, m, \tag{1.5}$$

где $\bar{\mathbf{y}}=(y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_1^{(n_1-1)}, \ldots, y_m, \dot{y}_m, \ldots, y_m^{(n_m-1)})$. Переменные, в которых записаны системы (1.4), (1.5), называются каноническими.

2. Условия существования. Для формулировки условий эквивалентности АУДС (1.1) системе (1.5) канонического вида потребуются следующие обозначения. АУДС (1.1) сопоставим $m+1$ векторное поле на R^n, полагая

$$\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \mathbf{B}_j=\sum_{i=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad j=1, \ldots, m. \tag{2.1}$$

Далее, если через $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ обозначить коммутатор векторных полей $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, то $ad_{\mathbf{A}}{}^r\mathbf{B}_j=[\mathbf{A}, ad_A^{r-1}\ \mathbf{B}_j]$, $r>1$, а $ad_{\mathbf{A}}{}^0\mathbf{B}_j=\mathbf{B}_j$.
Если

$$\mathbf{C}(\mathbf{x})=(c_1(\mathbf{x}), \ldots, c_n(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}, \quad \text{а} \quad \mathbf{X}=\sum_{i=1}^{n} c_i(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

— векторное поле на R^n, то, по определению, для любой функции $\varphi(\mathbf{x}) \in \in C^\infty(\Omega)$

$$\mathbf{X}\varphi(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} c_i(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i}=\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{C}(\mathbf{x})$$

и часто называется производной Ли функции $\varphi(\mathbf{x})$ по векторному полю $\mathbf{X}$. Используют также и обозначение $\mathbf{X}\varphi(\mathbf{x})=L_x\varphi(\mathbf{x})$. Полагают, что $\mathbf{X}^r\varphi(\mathbf{x})=\mathbf{X}(\mathbf{X}^{r-1}\varphi(\mathbf{x}))$ при $r>1$. Отметим, что коммутатор векторных полей тоже является векторным полем, а его координатные функции вычисляются через координатные функции векторных полей, образующих коммутатор. Для векторных полей $\mathbf{X}$ (см. выше) и

$$\mathbf{Y}=\sum_{i=1}^{n} d_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i},\quad (d_1(\mathbf{x}),\ldots,d_n(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}=\mathbf{D}(\mathbf{x})$$

их коммутатор

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]=\sum_{i=1}^{n} r_i(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_i},\quad (r_1(\mathbf{x}),\ldots,r_n(\mathbf{x}))^{\mathrm{T}}=\mathbf{R}(\mathbf{x}),$$

где

$$\mathbf{R}(\mathbf{x})=\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{C}(\mathbf{x})-\frac{\partial \mathbf{C}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{D}(\mathbf{x}).$$

Теорема. Для того чтобы в области Ω существовала каноническая система координат, в которой АУДС (1.1) имела бы канонический вид (1.5), необходимо и достаточно, чтобы существовали такие функции

$$\varphi_i(\mathbf{x})\in C^\infty(\Omega),\quad i=1,\ldots,m,$$

которые в Ω удовлетворяли бы системе уравнений

$$ad_{\mathbf{A}}^r\mathbf{B}_j\varphi_i(\mathbf{x})=0,\qquad r=0,\ldots,n_i-2,\ i,\ j=1,\ldots,m. \tag{2.2}$$

а соотношения

$$y_i^{(r)}=\mathbf{A}^r\varphi_i(\mathbf{x}),\ r=0,\ldots,n_i-1,\ i=1,\ldots,m, \tag{2.3}$$

вводили бы в Ω канонические переменные. При этом в (1.5)

$$f_i(\bar{\mathbf{y}})=\mathbf{A}^{n_i}\varphi_i(\mathbf{x}),\ g_{ij}(\bar{\mathbf{y}})=(-1)^{n_i-1}ad_{\mathbf{A}}^{n_i-1}\mathbf{B}_j\varphi_i(\mathbf{x}), \tag{2.4}$$

где $\mathbf{x}=\Psi^{-1}(\bar{\mathbf{y}})$ — решение (2.3) относительно $\mathbf{x}$.

Доказательство см. в [1 и 9], а при $m=1$ — в [10].

Для векторно-матричной переформулировки (2.2)—(2.4) будет использована $\mathbf{U}(\mathbf{x})$-матрица управляемости [1—3] АУДС (1.1):

$$\mathbf{U}(\mathbf{x})=\|\mathbf{B}_1^0(\mathbf{x}),\ldots,\mathbf{B}_m^0(\mathbf{x}),\ldots,\mathbf{B}_1^{n-1}(\mathbf{x}),\ldots,\mathbf{B}_m^{n-1}(\mathbf{x})\|,$$

где $\mathbf{B}_j^0(\mathbf{x})=\mathbf{B}_j(\mathbf{x})$ — столбец коэффициентов при управлении u_j в (1.1), а при $k>0$

$$\mathbf{B}_j^k(\mathbf{x})=\frac{\partial \mathbf{B}_j^{k-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{A}(\mathbf{x})-\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}_j^{k-1}(\mathbf{x}), \tag{2.5}$$

где $\dfrac{\partial \mathbf{B}_j^{k-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$, $\dfrac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ — матрицы Якоби.

Введем также системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(\mathbf{x}) \tag{2.6}$$

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{B}_j^{n_i-1}(\mathbf{x}). \tag{2.7}$$

Столбец $\mathbf{B}_j^r(\mathbf{x})$ матрицы управляемости является столбцом координат векторного поля $ad_{\mathbf{A}}^r\mathbf{B}_j$. Поэтому (2.2) можно записать в виде

$$\operatorname{grad}\varphi_i(\mathbf{x})\,\mathbf{U}_k(\mathbf{x})=0,\ k=n_i-1,\ i=1,\ldots,m, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{U}_k(\mathbf{x})$ — матрица, составленная из первых $m \cdot k$ столбцов матрицы управляемости.

Используя понятие производной функции в силу системы дифференциальных уравнений, (2.3)—(2.4) можно записать в виде

$$y_i^{(r)} = \frac{d^r \varphi_i(\mathbf{x})}{dt^r}\Bigg|_{(2.6)}, \quad r=0, \ldots, n_i-1; \quad i=1, \ldots, m, \tag{2.9}$$

$$f_i(\overline{\mathbf{y}}) = \frac{d^{n_i} \varphi_i(\mathbf{x})}{dt^{n_i}}\Bigg|_{(2.6)}, \quad \mathbf{x}=\Psi^{-1}(\overline{\mathbf{y}}), \quad i=1, \ldots, m, \tag{2.10}$$

$$g_{ij}(\overline{\mathbf{y}}) = (-1)^{n_i-1} \frac{d\varphi_i(\mathbf{x})}{dt}\Bigg|_{(2.7)}, \quad \mathbf{x}=\Psi^{-1}(\overline{\mathbf{y}}), \quad i, j=1, \ldots, m. \tag{2.11}$$

Ограничимся далее теми системами канонического вида (1.5), которые в Ω удовлетворяют условию

$$\det \|g_{ij}(\overline{\mathbf{y}})\| \neq 0. \tag{2.12}$$

3. Приводимость к каноническому виду. Вопрос о возможности приведения (1.1) в некоторой окрестности к каноническому виду (1.5), удовлетворяющему условию (2.12), решается достаточно просто с помощью следующего алгоритма.

A) Вычисляется матрица управляемости АУДС (1.1) по (2.5)

B) Находятся ранги матриц управляемости $\mathbf{U}_k(\mathbf{x})$, $k \leqslant n$.

Если

$$\nu_1 = \operatorname{rang} \mathbf{U}_1,$$
$$\nu_j = \operatorname{rang} \mathbf{U}_j - \operatorname{rang} \mathbf{U}_{j-1}, \quad j>1,$$

то [17]

$$n_i = \max(k, \nu_k \geqslant j). \tag{3.1}$$

Ограничимся случаем, когда ранги матриц $\mathbf{U}_k(\mathbf{x})$ в области постоянны.

C) Матрицы $\mathbf{U}_k$ должны обладать свойством инволютивности. По определению считаем, что матрица $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{W}_1(\mathbf{x}), \ldots, \mathbf{W}_s(\mathbf{x})\|$, где $\mathbf{W}_i(\mathbf{x})$ — столбец длины n, является инволютивной в области Ω, если добавление к ней столбцов, вычисленных по формуле

$$\mathbf{W}_{s+i+j-2}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{W}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{W}_j(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{W}_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{W}_i(\mathbf{x}),$$
$$j=2, \ldots, s, \quad i=1, \ldots, j-1.$$

не приводит в области Ω к увеличению ранга.

Вычисления, указанные в п.п. A)—C) реализуются на ПЭВМ с помощью системы аналитических вычислений. В то же время найти вид системы канонического вида достаточно сложно, так как это связано с нахождением решений систем уравнений в частных производных (2.8) и вычислением по формулам (2.9)—(2.11), а в аналитической форме решения системы (2.8) удается найти крайне редко. Применение известных численных методов для нахождения $\varphi_i(\mathbf{x})$ также не приведет к успеху из-за достаточно больших значений n, необходимости вычислений по формулам (2.9)—(2.11) и других причин. Поэтому возникает задача разработки соответствующих численных методов.

4. Численное построение системы канонического вида. Оказывается, что можно предложить достаточно простой алгоритм, позволяющий для произвольной точки из области Ω вычислить значения ее канонических координат и найти значения функций f_i и g_{ij}.

Основу этого алгоритма составляет вычисление значений функции φ_i в точке $\mathbf{x}^0 \in \Omega$. Действительно [11], имея возможность вычислять значения этих функций, можно вычислить как значения канонических коорди-

нат для произвольной точки, так и значения в этой точке функций f_i и g_{ij}. Для вычисления значения $y_i^{(r)}$ в точке $\mathbf{x}^0$ достаточно использовать (2.9), т. е. то, что $y_i^{(r)}$ является значением в точке $\mathbf{x}^0$ r-й производной функции $\varphi_i(\mathbf{x})$ в силу системы дифференциальных уравнений (2.6). Поэтому, выбрав шаг $\Delta\tau$, можно проинтегрировать систему (2.6) с начальным условием $\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^0$ и на этой траектории $\mathbf{x}(\tau)$ отметить $r+1$ точку, например $\mathbf{x}(k\cdot\Delta\tau)$, $k=0,\ldots,r$. Вычислив значения функции $\varphi_i(\mathbf{x}(\tau))$ в этих отмеченных точках и найдя по ним разностную аппроксимацию r-й производной функции $\varphi_i(\mathbf{x}(\tau))$ в точке $\mathbf{x}^0=\mathbf{x}(0)$, получим приближенное значение для $y_i^{(r)}$. Этой же процедурой можно найти значения функции f_i (достаточно считать, что $j=n$) и функции g_{ij}. Для последних, согласно (2.11), нужно найти значение первой производной функции $\varphi_i(\mathbf{x})$ в силу системы (2.7).

Для вычисления значений функции $\varphi_i(\mathbf{x})$ воспользуемся методом, изложенным в [11]. Пусть среди чисел $n_1,\ldots,n_m$ есть лишь r попарно различных $k_1>\ldots>k_r$, причем k_j встречается среди $n_1,\ldots,n_m$ s_j раз. Тогда из системы

$$\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{x})\cdot\mathbf{U}_{k\ -1}(\mathbf{x})=0 \tag{4.1}$$

надо найти s_j алгебраически независимых решений $\varphi=\varphi(\mathbf{x})$.

Из выполнения условий существования канонического вида (1.4) следует, что при $j=1$

$$\operatorname{rang}\mathbf{U}_{k_1-1}(\mathbf{x})=n-s_1.$$

Пусть базисный минор находится в этой матрице в первых $n-s_1$ строках и является общим для всех $\mathbf{x}\in\Omega$. Тогда систему (4.1) можно привести к виду

$$\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_k}+\sum_{l=n-s_1+1}^{n} b_{kl}(\mathbf{x})\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}=0,\qquad k=1,\ldots,n-s_1, \tag{4.2}$$

где $b_{kl}(\mathbf{x})\in C^\infty(\Omega)$. Выберем любую точку $G\in\Omega$ и проведем через точку G плоскость L_1 размерности s_1 параллельно координатным осям $x_{n-s_1+1},\ldots$ $\ldots,x_n$. Эта плоскость в силу сделанных предположений является нехарактеристической для системы (4.2) и на ней можно задать условия Коши. Положим, например,

$$\varphi(\mathbf{x})\,|_{L_1}=x_{n-k+1}. \tag{4.3}$$

Задачи Коши (4.2), (4.3) при $k=1,\ldots,s_1$ имеют решения, которые обозначим через $\varphi_1(\mathbf{x}),\ldots,\varphi_{s_1}(\mathbf{x})$. Значения этих функций в точке $\mathbf{x}^0\in\Omega$ находим следующим образом: проектируем $\mathbf{x}^0$ на плоскость $x_i=0$, $i=$ $=n-s_1+1,\ldots,n$; обозначаем проекцию через D, а проекцию точки G на эту же плоскость — через C. Проведем через точку $\mathbf{x}^0$ и плоскость L_1 плоскость P_1 размерностью s_1+1. Эта плоскость пересекается с поверхностью

$$\varphi_1(\mathbf{x})=\varphi_1(\mathbf{x}^0),\ldots,\ \varphi_{s_1}(\mathbf{x})=\varphi_{s_1}(\mathbf{x}^0) \tag{4.4}$$

по кривой γ. Это следует из того, что поверхность (4.4) $n-s_1$-мерна и касательная плоскость к ней в ее точке $\mathbf{x}$ порождается закрепленными векторами

$$\bar{r}_k(\mathbf{x})=(0,\ldots,\underset{k}{1},\ldots,0,\quad b_{k,\,n-s_1+1}(\mathbf{x}),\ldots,b_{kn}(\mathbf{x})),\quad k=1,\ldots,n-s_1.$$

Часть этой кривой, заключенная между точкой $\mathbf{x}^0$ и плоскостью L_1, проектируется в отрезок DC. Введем для точек плоскости P_1 систему координат $(\tau,\ x_{n-s_1+1},\ldots,x_n)$ с началом в точке D. Одна из осей — обозначим ее через $D\tau$ — задается единичным вектором $\bar{\mathbf{e}}$ в направлении вектора DC, а остальные — параллельны соответствующим осям $x_{n-s_1+1},\ldots,x_n$. Пусть $\bar{\mathbf{e}}=$ $=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_{n-s_1},0,\ldots,0)$. Тогда в каждой точке кривой γ существует вектор $\bar{\mathbf{s}}$, который: 1) лежит в плоскости, касательной к поверхности уров-

ня каждой из функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{s_1}$ и проходящей через эту точку; 2) проектируется в вектор $\bar{\mathbf{e}}$. Именно,

$$\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \varepsilon_1 \bar{r}_1(\mathbf{x}) + \ldots + \varepsilon_{n-s} \bar{r}_{n-s}(\mathbf{x}). \tag{4.5}$$

Этот вектор касается кривой γ. Во введенных на плоскости P_1 координатах векторное поле (4.5) запишется в виде

$$(1, \sigma_{n-s_1+1}(\mathbf{x}), \ldots, \sigma_n(\mathbf{x})), \quad \sigma_l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-s_1} \varepsilon_i b_{il}(\mathbf{x}).$$

Следовательно, в плоскости P_1 кривая γ является графиком решения задачи Коши

$$\frac{dx_l}{d\tau} = \sigma_l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n-s_1} \varepsilon_i b_{il}(\mathbf{x}), \tag{4.6}$$

$$x_l|_{\tau=0} = x_l^0,$$

где $l = n - s_1 + 1, \ldots, n$, а при $j = 1, \ldots, n - s_1$

$$x_j = x_j^0 + \varepsilon_j \tau.$$

При этом для $\tau = T = |DC|$, где $|DC|$ — расстояние между точками D и C, $x_l(T)$ — значение решения задачи (4.6) — будет равно значению l-й координаты точки пересечения кривой γ и плоскости L_1. Следовательно, $\varphi_l(\mathbf{x}^0) = x_{n-l+1}(T)$, $l = 1, \ldots, s_1$.

Аналогично находятся значения остальных функций. Следует только так поставить задачи Коши для систем вида (4.1), чтобы функции (2.3) были алгебраически независимыми в точках из Ω. Добиться этого можно с помощью дополнительного исследования систем вида (4.1). Убедиться же в правильности — с помощью проверки условия (2.12) [7—9].

5. Декомпозиция. Если в (1.5) правые части обозначить через новые управления v_i, то вместо (1.5) получим

$$y_i^{(n_i)} = v_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Следовательно, с помощью записи АУДС (1.1) в канонических переменных и введения через обратную связь новых управлений v_i исходная АУДС декомпозируется на m независимых подсистем. Нахождение функций $\varphi_i(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_m(\mathbf{x})$ с этой точки зрения можно интерпретировать как поиск таких выходов системы (1.1)

$$y_i = \varphi_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5.1}$$

для которых переход к каноническим координатам (с помощью (5.1)) и введение новых управлений приводит к тому, что вход v_i будет влиять только на выход y_i.

Если выход АУДС (1.1) уже задан в виде (1.2), то в случае, когда функции $\varphi_i(\mathbf{x}) = h_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяют условию теоремы из п. 2, управление v_i тоже будет влиять только на выход y_i, так как в канонических переменных система (1.1)—(1.2) будет иметь вид

$$y_i^{(n_i)} = v_i, \quad w_i = v_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Для того чтобы это имело место в окрестности некоторой точки, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке было выполнено условие (2.12), где $\varphi_i(\mathbf{x}) = h_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \ldots, m$ [7—9].

6. Нелинейный экспоненциальный наблюдатель. Рассмотрим систему

$$\dot{\xi} = \mathbf{f}(\xi), \quad y = h(\xi), \tag{6.1}$$

где $\xi \in R^n$, $\mathbf{f}$, $h \in C^\infty(R^n)$, $y \in R^1$.

Если существует отображение $\mathbf{x}=\mathbf{H}(\xi)$, позволяющее привести систему (6.1) к виду

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{S}(y), \quad y=\mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{6.2}$$

где

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}=\|1, 0, \dots, 0\|$$

— матрицы соответствующей размерности, $\mathbf{S}(y)$ — нелинейная функция от выхода y, то можно построить [16] для системы (6.1) наблюдатель, который имеет вид

$$\dot{\mathbf{z}}=\mathbf{A}\mathbf{z}-\mathbf{G}(y-\mathbf{C}\mathbf{z})+\mathbf{S}(y), \quad \mathbf{z}(t_0)=\mathbf{z}_0. \tag{6.3}$$

При этом ошибка $\mathbf{e}=\mathbf{x}-\mathbf{z}$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{e}}=(\mathbf{A}+\mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{e}.$$

Если матрица $\mathbf{G}$ выбирается так, чтобы спектр матрицы $\mathbf{A}+\mathbf{G}\mathbf{C}$ находился в левой полуплоскости, то

$$|\mathbf{x}(t)-\mathbf{z}(t)|=|\mathbf{H}(\xi(t))-\mathbf{z}(t)|\to 0$$

при $t\to\infty$ и тогда $\hat{\xi}=\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{z}(t))$ будет оценкой состояния системы (6.1).

В работе [16] приводятся условия существования такого отображения $\mathbf{H}(\xi)$. Для того чтобы систему (6.1) можно было преобразовать к виду (6.2), необходимо и достаточно, чтобы существовало векторное поле g, задаваемое системой соотношений

$$L_g L_f^k(h(\xi))=\begin{cases} 0, & k=0,\dots,n-2, \\ 1, & k=n-1, \end{cases} \tag{6.4}$$

и удовлетворяющее условиям

$$[g, ad_f^k g]=0, \quad k=1, 3, \dots, 2n-3. \tag{6.5}$$

Здесь $\mathbf{f}$ — векторное поле,

$$\mathbf{f}=\sum_{i=1}^{n} f_i(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \quad \|f_1(\xi),\dots,f_n(\xi)\|^{\mathrm{T}}=\mathbf{f}(\xi),$$

которое соответствует системе дифференциальных уравнений (6.1).

Алгоритм построения нелинейного наблюдателя (6.3) имеет следующий вид.

А) Составим матрицу наблюдаемости для системы (6.1), полагая

$$\mathbf{V}(\xi)=\begin{Vmatrix} \operatorname{grad}(h) \\ \operatorname{grad}(L_f(h)) \\ \dots\dots\dots \\ \operatorname{grad}(L_f^{n-1}(h)) \end{Vmatrix}, \tag{6.6}$$

и проверим выполнение условия $\operatorname{rang}\mathbf{V}(\xi)=n$.

В) Вычислим компоненты векторного поля

$$\mathbf{g}=\sum_{i=1}^{n} g_i(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_i}, \quad \mathbf{g}(\xi)=\|g_1(\xi),\dots,g_n(\xi)\|^{T}$$

из системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{V}(\xi)\,\mathbf{g}=\|0,\ldots,0,1\|^{T},$$

которая эквивалентна соотношениям (6.4) и имеет единственное решение благодаря выполнению условия rang $\mathbf{V}(\xi)=n$.

C) Проверяем выполнение условий (6.5), используя формулы для вычисления коммутаторов двух векторных полей в координатах. Если все условия выполнены, то отображение $\mathbf{x}=\mathbf{H}(\xi)$ существует. Это отображение приводит систему (6.1) к виду (6.2).

D) Определяем матрицы Якоби прямого и обратного отображений. Для этого воспользуемся тем, что замена координат вводится соотношениями [16]

$$\frac{\partial}{\partial x_{n-k}}=(-1)^{k}ad_f^{\,k}g,\qquad k=0,\ldots,n-1.$$

Эти соотношения связаны с отображением $\mathbf{H}(\xi)=\mathbf{x}$ системой уравнений вида

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\xi}\mathbf{U}(\xi)=\mathbf{E},$$

где $\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial\xi}$ — матрица Якоби, $\mathbf{U}(\xi)$ — матрица управляемости системы $\dot\xi=\mathbf{f}(\xi)+\mathbf{g}(\xi)\cdot u$, а

$$\mathbf{E}=\begin{Vmatrix} 0 & & (-1)^{n-1}\\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ -1 & & \\ 1 & & 0\end{Vmatrix}.$$

Тогда $\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial\xi}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{U}^{-1}(\xi)$, а $\left(\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial\xi}\right)^{-1}=\mathbf{U}(\xi)\cdot\mathbf{E}^{-1}$.

E) По заданному значению $\mathbf{x}$ определяем $\hat\xi$ как решение системы нелинейных уравнений $\mathbf{H}(\xi)=\mathbf{x}$. Заметим, что само отображение $\mathbf{H}$ неизвестно и задана только его матрица Якоби. Поэтому для решения этой системы уравнений целесообразно воспользоваться итерационным методом Ньютона:

$$\xi^{k+1}=\xi^{k}-\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\xi}\right)^{-1}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{H}(\xi^{k})),\tag{6.7}$$

где ξ^{k}, ξ^{k+1} — соответствующие приближения решения $\hat\xi$. В качестве начального приближения возьмем $\xi^{0}=0$ и положим $\mathbf{H}(\xi^{0})=0$. Тогда для получения $\mathbf{H}(\xi^{k})$ можно воспользоваться выражением

$$\mathbf{H}(\xi^{k})=\mathbf{H}(\xi^{k-1})+\int\limits_{\xi^{k-1}}^{\xi^{k}}\mathbf{E}\mathbf{U}^{-1}(\xi)\,d\xi,\tag{6.8}$$

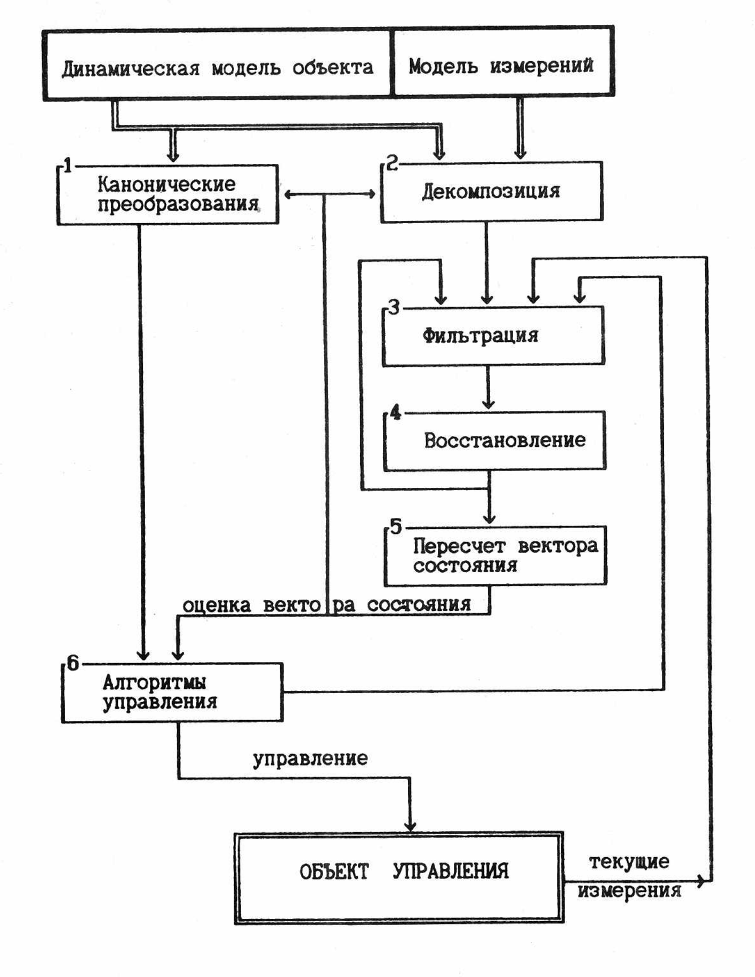
где в правой части стоит криволинейный интеграл, не зависящий от пути интегрирования.

F) По заданному выходу y определим нелинейную добавку $\mathbf{S}(y)$. Для этого найдем решение системы нелинейных уравнений

$$\mathbf{H}(\xi)=(y,0,\ldots,0).\tag{6.9}$$

При решении этой системы также используем метод Ньютона при тех же $\xi^{0}=0$ и $\mathbf{H}(\xi^{0})=0$. Пусть решение есть ξ'. Дифференцируя соотношение $\mathbf{x}=\mathbf{H}(\xi)$ в силу системы (6.1) и учитывая структуру матрицы $\mathbf{A}$, получим, что

$$\mathbf{S}(y)=\mathbf{E}\mathbf{U}^{-1}(\xi')\mathbf{f}(\xi').\tag{6.10}$$



При работе наблюдателя необходимо выполнять вычисления п. E, п. F при поступлении новых измерений, причем в качестве начальных приближений для решения систем (6.8) и (6.9) на всех шагах интегрирования уравнения наблюдателя (6.2), кроме первого, следует брать значения с предыдущего шага. Характерно, что вычисления п. A — п. D могут быть выполнены заранее.

7. Общая функциональная схема синтеза управления нелинейной динамической системой. Конструктивные результаты, полученные в рамках развития дифференциально-геометрического подхода, позволяют построить общую функциональную схему синтеза управления нелинейной динамической системой (см. рисунок).

Схема состоит из шести функциональных блоков. В блоке 1 решается задача канонических преобразований. Исходной информацией для этого блока является собственно адекватная модель динамической системы и текущая оценка вектора состояния системы. Алгоритм решения этой задачи представлен в разделах 1—4.

В блоке 2 решается задача декомпозиции исходной нелинейной динамической системы на m наблюдаемых подсистем канонического вида, линейных по измерениям. Исходной информацией для блока 2 является модель динамической системы, текущая оценка вектора ее состояния и вектора измерений.

В блоке 3 решается задача фильтрации измерений для подсистем на основе построения оптимальных фильтров по критерию апостериорной вероятности [18, 19]. Исходной информацией для решения процедур

фильтрации является: текущее управление, динамические подсистемы (выход блока 2), текущие измерения, текущие восстановленные неизмеряемые составляющие векторов декомпозированных подсистем.

В блоке 4 решается задача восстановления оставшейся части составляющих векторов подсистем. Эта задача может быть решена двумя способами. Первый способ связан с решением двухточечной краевой задачи, где в качестве известной части подвектора на концах временного интервала выступают текущие оценки составляющих векторов подсистем, входящих в блок 3. Алгоритм решения этой задачи представлен в [18]. Второй способ решения задачи восстановления связан с построением нелинейного экспоненциального наблюдателя. Здесь в качестве идеальных наблюдений выступают оценки составляющих подвекторов с выхода блока 3. Процедура синтеза нелинейного экспоненциального наблюдателя приводится в разделе. 6.

В блоке 5 вычисляется оценка вектора состояния исходной нелинейной динамической системы на основе использования оценок векторов подсистем.

В блоке 6 решается задача синтеза управления исходным объектом с использованием текущей оценки вектора состояния, получаемого с выхода блока 5, а также результатов канонического преобразования исходной системы (блок 1).

Заключение. Представленный конструктивный подход к исследованию нелинейных динамических систем с управлением позволяет на основе численно-аналитических процедур преобразовывать исходную систему к некоторой системе канонического вида, изучение свойств которой с целью решения поставленной исходной задачи не вызывает теоретических и практических затруднений. Разработанный численный метод исследования нелинейных динамических систем управления позволяет решать как задачу анализа структурных свойств (управляемость, наблюдаемость) исходной системы, так и задачу синтеза алгоритмов управления системой [1—4, 18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жевнин А. А., Крищенко А. П.* Управляемость нелинейных систем и синтез алгоритмов управления // ДАН СССР. 1981. Т. 258. № 4.
2. *Жевнин А. А., Крищенко А. П., Глушко Ю. В.* Управляемость, наблюдаемость нелинейных систем и синтез терминального управления // ДАН СССР. 1982. Т. 266. № 4.
3. Синтез алгоритмов терминального управления на основе концепций обратных задач динамики (обзор)/А. А. Жевнин, К. С. Колесников, А. П. Крищенко и др. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 4.
4. *Крищенко А. П.* Стабилизация программных движений нелинейных систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 6.
5. *Brockett R. W.* Feedback invariants for nonlinear systems // Preprints of 7 World Congress IFAC. Oxford: Pergamon Press, 1978. V. 2.
6. *Hunt L. R., Su R., Meyer G.* Global transformations of nonlinear systems // IEEE Trans. Aut. Contr. 1983. V. 28. № 1.
7. *Крищенко А. П.* Оптимальное управление нелинейными системами // АиТ, 1982. № 11.
8. *Крищенко А. П.* Исследование управляемости и множеств достижимости нелинейных систем управления // АиТ. 1984. № 6.
9. *Крищенко А. П.* Управляемость и множества достижимости нелинейных стационарных систем // Кибернетика и вычисл. техника. 1984. Вып. 62.
10. *Крищенко А. П.* Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений // Мат. моделирование технических систем. М.: 1988 (Тр. МВТУ; № 512).
11. *Назаренко А. Н.* Управление выходными характеристиками нелинейных систем // Мат. моделирование технических систем. М.: 1988 (Тр. МВТУ; № 512).
12. *Ha I. J.* The standart decomposed systemand noninteracting feedbacl control of nonlinear systems // SIAM J. Contr. and Opt. 1988. V. 26. № 5.
13. *Ковалев А. М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наукова думка, 1980.
14. *Коробов В. И.* Управляемость и устойчивость некоторых нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9. № 4.

15. *Иванова Е. Е.* Декомпозиция и факторизация систем, линейных по управлению // Математическое моделирование технических систем. М.: 1988 (Тр. МВТУ; № 512).
16. *Krener A. J., Isidori A.* Linearization by output injection and nonlinear observers // Systems Control Lett. 1983. № 3.
17. *Cheng D., Isidori A., Respondek W., Tarn T. J.* Exact linearization of nonlinear systems with outputs // Math. Sys. Theory. 1988. V. 21. № 1.
18. *Кушнарев В. И., Лысенко Л. Н.* Метод восстановления вектора состояния нелинейной динамической системы по результатам наблюдений // АиТ. 1987. № 2.
19. *Сейдж Э. П., Мелса Дж. Л.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.

Москва

Поступила в редакцию
17.VII.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 • 1991

УДК 62-50

А. Т. БАРАБАНОВ

МЕТОД РАУСА В ТЕОРИИ СИСТЕМ
I. ОБОБЩЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ РАУСА В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Метод Рауса, широко известный как метод анализа устойчивости линейных систем или в более общем смысле как метод определения числа правых корней многочлена, примерно с начала 60-х годов находит все более широкие применения и при решении других задач теории систем. В статье рассмотрен ряд задач теории систем – анализа состава корней характеристического многочлена, определения запасов устойчивости и частотных показателей качества, анализа условий гармонического баланса, абсолютной устойчивости, условий положительности рациональных функций, отделения точек границы Д-разбиения и др. На этих примерах показано значение для теории систем некоторых характерных задач алгебры многочленов. Предлагается обобщение проблемы Рауса как совокупности трех таких задач: об индексе Коши рациональной функции и взаимных свойствах соответствующей пары многочленов, о составе корней многочлена в их распределении относительно вещественной оси и о составе корней многочлена в их распределении относительно мнимой оси комплексной плоскости корней. Полное решение этой проблемы на основе обобщений алгоритма и метода Рауса существенно расширяет применения последнего в теории систем и позволяет определить новые подходы к построению эффективных средств исследования широкого круга ее задач.

Введение. Среди классических, фундаментальных методов исследования систем, вошедших в науку еще в прошлом веке, видное место принадлежит методу Рауса [1, 2]. Метод Рауса широко известен как средство анализа задач устойчивости. Теорема Рауса о числе правых корней многочлена применяется при анализе качества систем [3]. Известны также применения алгоритма Рауса для анализа состава вещественных корней многочлена [4–6, 19] (см. также [3]). Наиболее полное решение подобной задачи предложено в [5, 6] в связи с вопросом о критериях положительности многочлена, возникающем при исследованиях различных свойств систем. Этот шаг в развитии метода Рауса имеет существенное значение для теории систем. Расширение применений, а также использование метода Рауса как эффективного инструмента машинного анализа в САПР сопровождаются известной интенсификацией его исследований, а также разработками соответствующих алгоритмических и программных средств [7–11] и др. Поскольку возможности метода Рауса далеко не исчерпаны, этот опыт побуждает к поиску дальнейших его обобщений и применений. Здесь нам представляются важными три стороны вопроса. Во-первых, дальнейшие обобщения самого содержания проблемы Рауса должны, естественно, охватывать все более широкий круг алгебраических задач теории систем. Во-вторых, желательно сохранение простоты алгоритмических средств решения проблемы, характерной для метода Рауса. И, в-третьих, необходимо их дальнейшее развитие и совершенствование, в частности, с целью преодоления явления вырождаемости алгоритма Рауса (см. так называемые критические случаи [12]), а также обеспечения существенно расширенного состава решаемых задач. Данная работа выполнена в рамках этих представлений. В ее первой части рассмотрен ряд известных методов теории систем. Их основное содержание редуцировано в адекватные конструкции, ведущие к некоторым характерным алгебраическим зада-

чам. В результате предлагаемая совокупность задач алгебры многочленов формулируется как общая проблема Рауса, поскольку в ее содержании главной остается задача о составе корней многочлена. Как нам представляется, предложенное наполнение проблемы отражает потребности методов теории систем в алгебраических средствах исследования не только рассмотренных, но и многих других ее задач. В то же время содержание проблемы остается достаточно однородным, и на все вопросы, которые в ней ставятся, возможно дать ответ на некоторой единой основе и в единой форме. Это будет показано во второй части работы, посвященной полному решению общей проблемы Рауса.

1. **Обобщенная задача о правых корнях.** В связи с проблемой устойчивости заданного движения системы Раус предложил метод [1, 2], позволяющий для многочлена с вещественными коэффициентами

$$q(s)=a_0s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n \qquad (1.1)$$

сделать заключение о его устойчивости. Многочлен (1) называют устойчивым [13], когда все его корни расположены в левой полуплоскости. В рамках этой задачи его метод вряд ли нуждается в каких-либо дополнениях, поскольку алгоритм Рауса позволяет сделать заключение об устойчивости или неустойчивости многочлена (1.1) во всех случаях и даже при остановке алгоритма [13]. В несколько более общей задаче, а именно задаче о числе правых корней многочлена (1.1), рассмотренной Раусом, его метод уже нуждается в усовершенствованиях, хотя бы потому, что в так называемых критических случаях [12] (появление подряд идущих нулей в очередной вспомогательной строке таблицы Рауса и как следствие — остановка алгоритма) алгоритм решения задачи вырождается. Это означает, что он не может быть завершен без введения каких-либо дополнительных правил (предложенные Раусом способы коррекции алгоритма не исчерпывают проблемы [12], и ее изучение продолжается в современных исследованиях [7—10] и др.).

Кроме того, предложенный Раусом метод определения числа правых корней многочлена (1.1) не дает ответа на вопрос о составе корней: сколько корней комплексных, вещественных, чисто мнимых, сколько в каждой категории корней простых, кратных, различных. Может показаться, что это не имеет значения в задаче о правых корнях, когда система не устойчива. Действительно, при анализе качества важнее выявить состав левых (при отсутствии правых, как это требуется по условию устойчивости) корней. Однако для этого может быть использована соответствующая замена переменных. Более того, метод решения задачи о составе правых корней, примененный к многочлену $q(s-l)$, становится средством решения более общей задачи о составе корней многочлена (1.1), принадлежащих заданной полосе $l'\leqslant \operatorname{Re} s\leqslant l''$. Появляется возможность углубления исследований качества системы, например на основе выделения доминирующих корней и соответствующих асимптотических оценок процесса. Более сложные замены переменных (отображения областей на полуплоскость) позволяют на этой основе решать задачи локализации корней многочлена и в соответственно более сложных областях плоскости корней. Таким образом, обобщенная задача о правых корнях многочлена — как задача о составе этих корней, которая может быть, конечно, дополнена и задачей о левых корнях, представляется весьма значимой для теории линейных систем — как основа для достаточно сложных и важных исследований их качества. Уже методы решения простейших задач о составе (или распределении) корней дают существенные практические результаты, как, например, в исследованиях степени устойчивости, относительной устойчивости и апериодичности систем [3, 14 15].

Вместе с тем значение и различные применения обобщенной задачи о правых корнях вещественного многочлена, конечно, выходят далеко за рамки задачи анализа переходных процессов в линейных системах и оп-

ределяются всем спектром алгебраических задач теории систем (см., например, [3]), связанных прежде всего с теорией и применениями матриц, квадратических форм, многочленов и рациональных функций. Эта задача расширяет содержание проблемы Рауса в очевидном направлении.

Теперь обратимся к другому направлению возможных ее обобщений. Оно связано с теорией рациональных функций вида

$$\Phi = H(s)/Q(s), \tag{1.2}$$

где $H(s)$, $Q(s)$ — многочлены с вещественными коэффициентами и задачами распределения вещественных корней многочлена. В связи с этим будем систематически использовать индекс Коши функций [12, 13]. Введем для удобства необходимое определение. Пусть рассматриваются значения функции (1.2) на вещественной оси $\Phi(x)$, $x \in R^1$, и в некотором открытом интервале (a, b) выделены ее вещественные полюсы $x_1, x_2, \ldots, x_N$, в которых она меняет знак, т. е. полюсы нечетной кратности.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$ и сколь угодно мало. Целое число

$$I_a^b H(x)/Q(x) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{sign} H(x_i+\varepsilon)/Q(x_i+\varepsilon), \tag{1.3}$$

будем называть индексом функции (1.2) относительно интервала (a, b).

Подчеркнем, что индекс функции не «чувствителен» к полюсам четной кратности, а также к устранимым полюсам, определяемым общими корнями многочленов $H(s)$, $Q(s)$ одинаковой кратности. Индекс Коши эффективно используется в решении проблемы Рауса [12, 13, 23], а также и других задач, связанных с анализом многочленов и рациональных функций. Так же и в нашей работе задача об индексе рациональной функции будет занимать ведущее место, а ее решение определять возможности решения многих других задач.

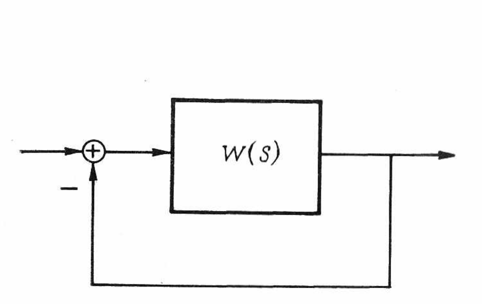
Рассмотрим индексы относительно отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$, а также относительно этой полуоси числа: $\rho(Q)$ — всех различных отрицательных корней многочлена $Q(x)$; $\rho_i(Q)$ — всех различных i-кратных отрицательных его корней; $\rho(Q/H^+)$, $\rho(Q/H^-)$ — всех различных отрицательных его корней, доставляющих соответственно положительные, отрицательные значения многочлену $H(x)$; $\rho(Q, H)$ — всех различных общих отрицательных корней многочленов $Q(x)$, $H(x)$. Все эти числа прямым образом связаны с индексом той или иной рациональной функции, образуемой с помощью многочленов $Q(x)$, $H(x)$ (см. [12, 13], а также вторую часть работы).

Теперь, чтобы определить содержание второго направления обобщений проблемы Рауса, рассмотрим некоторые известные методы теории систем.

2. Оценка запасов устойчивости системы с единичной отрицательной обратной связью. Пусть передаточная функция прямой цепи системы (рис. 1) задана в виде $w(s) = p(s)/q(s)$, где $w(\infty) = 0$, $q(s) = s^r g(s)$, $p(0)/g(0) = k > 0$, $g(s)$ — устойчивый многочлен (система устойчива в разомкнутом состоянии), и либо $r = 0$ (система статического типа), либо $r = 1$ (система астатического типа). Для того чтобы рассматриваемая замкнутая система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы частотный годограф $w(j\omega)$, $0 \leqslant \omega < \infty$ не охватывал точку $(-1, 0j)$ [16]. При этом система имеет запас устойчивости по амплитуде не менее $m > 1$ и по фазе не менее μ, если у ее частотного годографа нет общих точек с вещественной осью слева от точки $-1/m$ и с единичной окружностью в центральном угле μ (рис. 2).

Найдем необходимые и достаточные условия того, что запасы устойчивости не меньше заданных. Полагая $\beta = 1/m$, имеем

$$\operatorname{Re} w(j\omega) + \beta = {}^1/_2[w(j\omega) + w(-j\omega)] + \beta = A(x)/|q(j\omega)|^2, \tag{2.1}$$



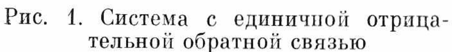


Рис. 1. Система с единичной отрицательной обратной связью

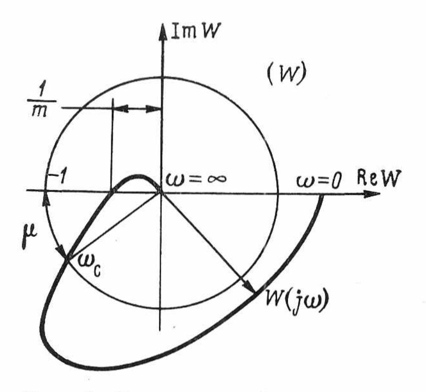


Рис. 2. Запасы устойчивости системы

$$\operatorname{Im} w(j\omega)=\frac{1}{2j}\,[w(j\omega)-w(-j\omega)]=-B(x)/\omega\,|\,q(j\omega)\,|^2, \qquad (2.2)$$

где $x=-\omega^2$. При $Q(s)=p(s)+p$, $q(s)$ принято, что

$$A(s^2)={}^1/_2\,[q(s)Q(-s)+q(-s)Q(s)]=\text{чет}\,[q(-s)Q(s)], \qquad (2.3)$$

$$B(s^2)={}^1/_2\,[sp(s)q(-s)-sp(-s)q(s)]=\text{чет}\,[-sp(-s)q(s)], \qquad (2.4)$$

где символ «чет» означает часть многочлена с четными степенями.

С помощью соотношений (2.1), (2.2) нетрудно обнаружить, что годограф системы не имеет общих точек с вещественной осью слева от точки $-1/m$ тогда и только тогда, когда для всякого отрицательного корня ξ многочлена $B(x)$ имеет место неравенство $A(\xi)\geqslant 0$ (тогда $\operatorname{Im} w(j\Omega)=0$, $\Omega^2=-\xi$, а $\operatorname{Re} w(j\Omega)\geqslant -\beta=-1/m$). Это значит, что условие

$$\rho(B/A^-)=0 \qquad (2.5)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы запас устойчивости по амплитуде рассматриваемой системы был не меньше m.

Теперь о запасе по фазе. Пусть многочлен $E(x)$ определен соотношением $E(s^2)=q(s)q(-s)-p(s)p(-s)$, а в многочлене $A(x)$, определяемом выражением (2.3), положим $\beta=\cos\mu$. Система имеет запас не менее μ тогда и только тогда, когда всякий отрицательный корень ξ многочлена $E(x)$ доставляет неотрицательные значения многочлену $A(x)$. Это следует из условия, что на частоте среза ω_c, определяемой равенством $w(j\omega_c)\,w(-j\omega_c)=1$, выполняется неравенство $\operatorname{Re} w(j\omega_c)>\cos\mu$. Таким образом, возникает условие

$$\rho(E/A^-)=0 \qquad (2.6)$$

Итак, для того чтобы замкнутая система была устойчивой с запасами по амплитуде и фазе не менее m и μ соответственно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (2.5) и (2.6).

3. Условия выпуклости частотного годографа $w(j\omega)$. Строго говоря, оценка запасов устойчивости имеет смысл лишь при уверенности, что годограф не имеет какой-либо сложной формы, когда условия (2.5) и (2.6) выполняются, но тем не менее годограф подходит близко к точке $(-1, 0j)$. Поэтому в этом и других случаях могут представлять интерес как средство дополнительного анализа условия выпуклости частотного годографа $w(j\omega)$, $0\leqslant\omega<\infty$. Будем рассматривать годограф как параметрически заданную кривую $u=u(\omega)=\operatorname{Re} w(j\omega)$, $v=v(\omega)=\operatorname{Im} w(j\omega)$. Угол ϑ наклона ее касательной в текущей точке определяется соотношением $\operatorname{tg}\vartheta=dv/du=\dot v(\omega)/\dot u(\omega)$, где точка означает дифференцирование по ω. Поэтому условие выпуклости годографа можно записать как условие сохранения знака

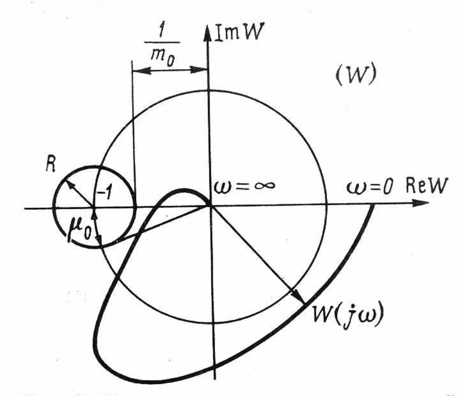


Рис. 3. Гарантированные запасы устойчивости системы

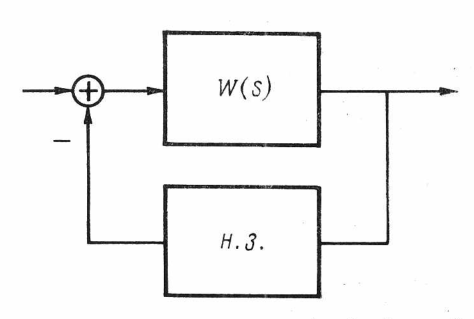


Рис. 4. Система с нелинейной обратной связью

производной

$$\dot{\vartheta}=[\ddot{v}(\omega)\dot{u}(\omega)-\dot{v}(\omega)\ddot{u}(\omega)]/[\dot{u}^2(\omega)+\dot{v}^2(\omega)].$$

Записывая $\operatorname{Re} w(j\omega)$ и $\operatorname{Im} w(j\omega)$ в виде

$$\operatorname{Re} w(j\omega)=a(x)/c(x), \quad \operatorname{Im} w(j\omega)=\omega b(x)/c(x), \tag{3.1}$$

где $c(s^2)=q(s)q(-s)$, $a(s^2)=\text{чет}[p(s)q(-s)]$, $s^2b(s^2)=\text{чет}[-sp(-s)q(s)]$, и вычисляя производные, находим $\dot{\vartheta}/\cos^2\vartheta=Q(x)/xD^2(x)$, где $x=-\omega^2$,

$$Q(x)=2xE'(x)D(x)-2xE(x)D'(x)-E(x)D(x),$$
$$E(x)=xb(x)c'(x)+xb'(x)c(x)+{}^1/_2 b(x)c(x),$$
$$D(x)=a'(x)c(x)-a(x)c'(x).$$

Таким образом, производная $\dot{\vartheta}(\omega)$ меняет знак вместе с многочленом $Q(x)$, если последний имеет вещественные отрицательные корни нечетной кратности. Из этого следует, что условие выпуклости частотного годографа можно записать в виде

$$\rho_1(Q)+\rho_3(Q)+\ldots+\rho_{2l+1}(Q)=0, \tag{3.2}$$

где число l определяет наивысшую нечетную кратность.

Если ослабить требование к выпуклости, допуская, например, однократное изменение знака производной $\dot{\vartheta}$ (астатическая система), то правую часть равенства (3.2) следует заменить на единицу.

4. Запасы устойчивости и показатель колебательности. Другой подход к оценке запасов устойчивости системы, изображенной на рис. 1, иллюстрирует рис. 3. Условие

$$|1+w(j\omega)|^2\geqslant R^2, \quad 0\leqslant\omega<\infty, \tag{4.1}$$

означает для устойчивой системы, что частотный годограф $w(j\omega)$, $0\leqslant\omega<<\infty$, обходит круг радиусом $R<1$ с центром в точке $(-1,\ 0j)$, не охватывая его, и система имеет запасы устойчивости по амплитуде и фазе не меньше значений $m_0(R)$, $\mu_0(R)$, определяемых величиной R. Можно говорить поэтому просто о «радиальном» запасе. С помощью многочлена $Q(s^2)=q_*(s)q_*(-s)-R^2p(s)p(-s)$, где $q_*(s)=q(s)+p(s)$, неравенство (2.9) можно записать в виде $Q(x)\geqslant0$, $x\leqslant0$, и поскольку $Q(-\infty)>0$, его нарушение возможно только вместе с изменением знака многочлена. Из этого следует, что условие $\rho(Q)=0$ означает, что радиальный запас больше R, а условие вида (3.2) — что он не меньше этой величины. Заметим, что условие «не меньше» можно записать и в виде

$$\rho_2(Q)+\rho_4(Q)+\ldots+\rho_{2l}(Q)=\rho(Q), \tag{4.2}$$

где l определяет наивысшую четную кратность корней.

Оценка запаса устойчивости по кругу радиусом R по существу равносильна оценке показателя колебательности

$$M_{\max}=\max M(\omega), \quad M(\omega)=|w(j\omega)|/|1+w(j\omega)|$$

устойчивой замкнутой системы, поскольку условие, что показатель колебательности не превосходит заданной величины $M>1$, можно записать в виде $M^2-M^2(\omega)\geqslant 0$, или

$$M^2 q_*(j\omega)q_*(-j\omega)-p(j\omega)p(-j\omega)\geqslant 0, \quad R=1/M.$$

5. Условия гармонического баланса. Рассмотрим систему с нелинейным звеном в цепи обратной связи, изображенную на рис. 4. Пусть уравнение гармонического баланса, определяющее частоту ω и амплитуду α автоколебаний, имеет вид [16]

$$k(\alpha)w(j\omega)=-1, \tag{5.1}$$

где $k(\alpha)$ — заданная функция амплитуды — коэффициент гармонической линеаризации (второй коэффициент принимаем равным нулю). Определяя вещественную и мнимую части функции $w(j\omega)$ выражениями (3.1), условие гармонического баланса (5.1) можно записать в виде

$$k(\alpha)a(\xi)+c(\xi)=0, \quad b(\xi)=0, \quad \xi=-\omega^2<0. \tag{5.2}$$

Пусть интервал $K^*=[k_1, k_2]$, $k_2>k_1>0$ принадлежит области значений K функции $k(\alpha)>0$. Пусть условие гармонического баланса выполняется при некотором значении $k(\alpha)\in K^*$. Тогда имеет место соотношение

$$\begin{array}{l} \text{либо 1.} \quad A_1(\xi)=k_1a(\xi)+c(\xi)=0, \\ \text{либо 2.} \quad A_2(\xi)=k_2a(\xi)+c(\xi)=0, \\ \text{либо 3.} \quad A_1(\xi)>0, \quad A_2(\xi)<0. \end{array} \tag{5.3}$$

При этом соответственно 1. $k(\alpha)=k_1$, 2. $k(\alpha)=k_2$, 3. $k_1<k(\alpha)<k_2$. Неравенства 3. (5.3) имеют место в силу того, что $c(\xi)>0$, а при $k(\alpha)>0$ и условии (5.2) $a(\xi)<0$.

Если наоборот, при некотором $\xi<0$ $b(\xi)=0$ и выполняется одно из соотношений (5.3), то условие гармонического баланса (5.2) выполняется при $k(\alpha)\in K^*$.

Из этого следует, что для выполнения условия гармонического баланса в интервале K^* необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\begin{array}{l} \text{либо 1.} \quad \rho(b, A_1)\geqslant 1, \\ \text{либо 2.} \quad \rho(b, A_2)\geqslant 1, \\ \text{либо 3.} \quad \rho(b/A^-)\geqslant 1, \end{array} \tag{5.4}$$

где $A(x)=A_1(x)A_2(x)$, поскольку соотношения (5.4) равносильны соотношениям (5.3). Если годограф имеет простую форму — пересекает отрицательную полуось снизу 1 раз,— то необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\begin{array}{l} \text{либо 1.} \quad \rho(b, A_1)=1, \quad \text{либо 2.} \quad \rho(b, A_2)\geqslant 1, \\ \text{либо. 3.} \quad I_{-\infty}{}^0 A_1(x)/b(x)=-1, \quad I_{-\infty}{}^0 A_2(x)/b(x)=+1. \end{array} \tag{5.5}$$

Соотношения 3. (5.5) следуют из соотношений 3. (5.3) в силу соотношений (3.1), поскольку $b(\xi+0)=c(\xi)\operatorname{Im} w(j(\omega-0))/\omega$. Достаточным условием указанной формы годографа являются равенства

$$\rho(b)=1, \quad I_{-\infty}{}^0 a(x)/b(x)=+1.$$

Второе из них опять-таки следует из соотношений (3.1). Пусть условия (5.4) имеют место. Тогда параметры автоколебаний определяются после вычисления корня ξ соотношениями $\omega^2=-\xi$, $k(\alpha)=k=-c(\xi)/a(\xi)$. Если ни одно из указанных условий не выполняется при $K^*=K$, то автоколебания в системе возникают.

6. Точки границы Д-разбиения. Пусть коэффициенты многочлена (1.1) зависят линейно от вещественного параметра μ, так что многочлен можно представить в виде $q(s)+\mu g(s)$. Назовем точкой границы Д-разбиения [17] вещественной оси такое значение параметра, при котором многочлен имеет чисто мнимый корень $j\omega$, т. е. выполняется равенство $p(j\omega)+$ $+\mu g(j\omega)=0$. Определяя вещественную и мнимую части функции $\mu=$ $=-w(j\omega)=p(j\omega)/g(j\omega)$ выражениями (3.1), уравнениями точки границы легко придать вид

$$\mu c(\xi)+a(\xi)=0, \quad b(\xi)=0, \quad \xi=-\omega^2<0. \tag{6.1}$$

Пусть рассматривается интервал $M=[\mu_1, \mu_2]$, $\mu_2>\mu_1>0$ и пусть значение параметра, определяемое соотношениями (6.1), принадлежит интервалу M. Тогда выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} &\text{либо 1.} \quad A_1(\xi)=\mu_1 c(\xi)+a(\xi)=0,\\ &\text{либо 2.} \quad A_2(\xi)=\mu_2 c(\xi)+a(\xi)=0,\\ &\text{либо 3.} \quad A_1(\xi)<0, \quad A_2(\xi)>0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

При этом соответственно: 1. $\mu=\mu_1$, 2. $\mu=\mu_2$, 3. $\mu_1<\mu<\mu_2$. Если, наоборот, при некотором $\xi<0$, $b(\xi)=0$ и выполняется условие (6.2), то это означает, что условие (6.1) выполняется при $\mu\in M$. Таким образом, условие (6.2) необходимо и достаточно для того, чтобы отрезок $[\mu_1, \mu_2]$ содержал точку границы. Введем многочлен

$$A(x)=A_1(x)A_2(x)=\mu_1\mu_2 c^2(x)+(\mu_1+\mu_2)a(x)c(x)+a^2(x).$$

В соответствии со сказанным можно утверждать, что точка границы принадлежит интервалу M тогда и только тогда, когда: либо 1. $A_1(\xi)=0$, либо 2. $A_2(\xi)=0$, либо 3. $A(\xi)<0$, т. е. либо 1. $\rho(b, A_1)\geqslant 1{,}2$, либо $\rho(b, A_2)\geqslant 1{,}3$, либо

$$\rho(b/A^-)\geqslant 1. \tag{6.3}$$

При анализе области устойчивости многочлена полученный результат может быть полезным в следующей формулировке: заданный интервал $[\mu_1, \mu_2]$ тогда и только тогда является интервалом устойчивости, когда не выполняется ни одно из условий (6.3), т. е. когда: 1. $\rho(b, A_1)=0$, 2. $\rho(b, A_2)=0$, 3. $\rho(b/A^-)=0$.

7. Условия абсолютной устойчивости. Достаточным условием абсолютной устойчивости нелинейной системы, указанной на рис. 4, является, как известно, частотное неравенство [18]

$$\mathrm{Re}(1+\theta j\omega)w(j\omega)+1/k_{\text{п}}>0, \quad \omega\geqslant 0.$$

Пусть полюсы передаточной функции принадлежат левой полуплоскости. Если существует значение вещественного параметра θ, для которого неравенство выполняется при всех частотах, то система с нечетно-симметричной нелинейной характеристикой, принадлежащей $k_{\text{п}}$-сектору, абсолютно устойчива. Используя представления типа (2.1), неравенству В. М. Попова легко придать вид

$$\pi(x)=A(x)+\theta B(x)>0, \quad x\leqslant 0, \tag{7.1}$$

где многочлен $A(x)$ определяется выражением (2.3) при $\beta=1/k_{\text{п}}$, а $B(x)$ — выражением (2.4). Так как $B(0)=0$, то $\pi(0)=A(0)$ и условие положительности многочлена $\pi(x)$ (7.1) можно записать в виде

$$A(0)>0, \quad \rho(\pi)=0. \tag{7.2}$$

Условия типа (7.2) и соответствующие критерии могут быть предложены для проверки неравенства В. М. Попова [5, 19]. Однако их непосредственное применение возможно лишь в некоторой схеме перебора параметра. Не имея здесь возможности остановиться более подробно на анализе неравенства (7.1), укажем одно простое и полезное дополнение к условию (7.2). Если неравенство (7.1) выполняется, то оно выполняется и для всех отрицательных корней многочленов $B(x)$, $A(x)$. Отсюда следуют необходимые условия выполнения неравенства (7.1)

$$\rho(B, A)=0,\ \rho(B/A^-)=0,\ \rho(A/B^-)\rho(A/B^+)=0. \tag{7.3}$$

8. Положительные функции. Важную роль в теории систем играют условия положительности [3, 20, 21] рациональных функций (1.2) $\mathrm{Re}\,\Phi(j\omega)$, $0\leqslant\omega<\infty$, которая подтверждается и рассмотренными выше примерами. Признаки положительности определяются свойствами многочлена $A(s^2)=\text{чет}\,[H(s)Q(-s)]$, поскольку $\mathrm{Re}\,\Phi(j\omega)=A(x)/|Q(j\omega)|^2$, $x=-\omega^2$ (см. формулы (2.1), (2.2) при $\beta=0$). Для положительной определенности (строгой положительности $A(x)>0$, $x\leqslant0$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $A(-\infty)>0$ (или $A(0)>0$) и $\rho(A)=0$, а для знакоположительности (неотрицательности $A(x)\geqslant0$, $x\leqslant0$) — условия:

$$A(-\infty)>0 \quad (\text{или } A(0)\geqslant0) \text{ и } \rho_1(A)+\rho_3(A)+\ldots=0. \tag{8.1}$$

Для так называемых основных положительных вещественных функций (ПВФ) — функций Бруне [3, 20, 21] — следует присоединить дополнительные условия, связанные с другими элементами определения ПВФ. Не вдаваясь в детали, отметим, что условия вещественности и положительности вычетов функции (1.2) в ее простых чисто мнимых полюсах включают в себя условие вида (3.2), и требует определения наибольшего общего делителя (НОД) вещественной и мнимой части многочлена.

Анализ положительности может опираться непосредственно на теорему Штурма [23], однако большой интерес представляют более развитые методы [4, 6, 19], сравнимые по эффективности практических применений, скажем, с методом анализа устойчивости систем Рауса — Гурвица. Вместе с тем даже весьма полное решение этой задачи, достигнутое в [6], нуждается в обобщении, так как оно все же ограничено рамками регулярного случая, не содержащего вырождения алгоритма Рауса [12].

9. Структурные свойства систем. Пусть рассматривается модель в комплексной области

$$A(s)x_i(s)=B_i(s)u(s)+X_{0i}(s), \quad i\in\overline{1,\, n},$$

многомерной системы со скалярным управлением $u(t)$. Многочлен $X_{0i}(s)$ определяется начальными значениями x_{i0}, $i\in\overline{1,\ n}$, фазовых переменных $A(s)$, $B_i(s)$; $i\in\overline{1,\ n}$ — заданные многочлены. Такие структурные свойства системы, как управляемость, наблюдаемость, стабилизируемость и другие, в полной мере зависят от того, имеются ли общие корни у многочленов $A(s)$, $B_i(s)$, $i\in\overline{1,\ n}$, и как они расположены относительно мнимой оси. В связи с этим возникает вопрос о средствах решения подобной задачи, в частности о построении НОД с последующим анализом состава их корней.

Заключение. Обобщение проблемы Рауса. Ограничимся рассмотренными примерами задач теории систем. Мы не стремимся к самым общим их решениям. Цель состояла в том, чтобы выявить типичные алгебраические конструкции, необходимые для формулирования некоторой общей задачи, решение которой позволяет получить решение как рассмотренных, так и многих других задач теории систем (приведенных, например в [3], где содержится обширная систематизация алгебраических методов теории систем). Эта общая задача выступает как совокупность следующих трех задач алгебры многочленов.

1. Задача о взаимных свойствах пары многочленов. Для пары многочленов определить их НОД, индексы заданной ими рациональной функции относительно открытых интервалов $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, а также число всех различных вещественных корней в этих интервалах одного многочлена, доставляющих положительные (отрицательные) значения другому.

2. Задача о распределении корней многочлена относительно вещественной оси. Для каждой категории корней многочлена — вещественных отрицательных, вещественных положительных и комплексных — определить: число всех (считая каждый корень столько раз, какова его кратность), число всех различных и число всех различных заданной кратности корней — от первой до наивысшей.

3. Задача о распределении корней многочлена относительно мнимой оси. Для каждой категории корней многочлена — расположенных в правой полуплоскости, чисто мнимых и кососимметричных — определить: число всех корней (считая каждый корень столько раз, какова его кратность), число всех различных и число всех различных заданной кратности корней — от первой до наивысшей. Эта задача может быть дополнена аналогичной задачей о левых корнях.

Предлагаемая совокупность задач и представляется нами как общая проблема Рауса. Простое и естественное обобщение алгоритма Рауса, как будет показано, позволяет получить полное решение этой проблемы (частично представленное нами в [22]). Это означает, что решение охватывает как регулярные, так и критические случаи [12], приводящие к вырождению алгоритма формирования строк таблицы в алгоритме Рауса, и во всех случаях дает ответы на вопросы, поставленные в задачах 1., 2., 3.

В применении к рассмотренным здесь задачам это означает, что условия (2.5), (2.6), (3.2), (4.2), (5.4), (5.5), (6.3), (7.2), (7.3), (8.1) во всех случаях могут быть проверены с помощью алгоритмов полного решения проблемы Рауса, реализующих тем самым метод Рауса в рассмотренном круге задач теории систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Routh E. I.* A treatise on the stability of a given state of motion, particulary steady motion. L.: Macmillan, 1877.
2. *Routh E. J.* Stability of a given state of motion. L.: Macmillan, 1877.
3. *Джури Э.* Инноры и устойчивость: динамических систем. М.: Наука, 1979.
4. *Fruer W. D.* Applications of Routh's algorithm to networktheory problems // IRE Trans. on Circuit. Theory. 1959. V. CT-6.
5. *Siljak D. D.* Algebraic criterion for absolute stability, optimality and passivity of dynamik systems // Proc. IEEE (London). 1970.
6. *Siljak D. D.* New algebraic criteria for positive realness. // Proc. 4th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems. (London). Princeton Univ., 1970.
7. *Chang T. and Chen C.* On the Routh-Hurwitz criterion // IEEE Trans. Automat Control. N. Y. June 1974. V. AC-19.
8. *Yeung K. S.* Routh-Hurwitz Test Under Vanishing Leading Array Elements // IEEE Trans. Automat. Control. N. Y. January 1983. V. AC-28. № 1.
9. *Yeung K. S.* Addentum to Routh-Hurwitz Test Under Vanishing Leading Array Elements // IEEE Trans. Automat. Control. N. Y. June 1981. V. AC-26.
10. *Khatwani K. J.* Comments on Comments on the Routh-Hurwitz croterion // IEEE Trans. Automat. Contr. N. Y. June 1981. V. AC-26.
11. *Чубаров М. А., Долгов Г. А., Киселева Л. В., Макарычева Д. Н., Митина Т. А.* Структура автоматизированной системы для исследования устойчивости линеаризованных моделей. Пакеты прикладных программ. Аналитические преобразования. М.: Наука, 1988.
12. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.
13. *Постников М. М.* Устойчивые многочлены. М.: Наука, 1981. 176 с.
14. *Ципкин Я. З., Бромберг П. В.* О степени устойчивости линейных систем // Изв. АН СССР. ОТН. 1945. Т. 12.
15. *Мееров М. В.* Критерии апериодичности систем // Изв. АН СССР. ОТН. 1945, Т. 12.

16. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования М.: Наука, 1975.
17. *Неймарк Ю. И.* Устойчивость линеаризованных систем. Л.: ЛКВВИА, 1949.
18. *Попов В. М.* Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования // АиТ. 1961. Т. 22. № 8.
19. *Мееров М. В.* Аналитические условия положительности вещественной функции // ДАН СССР. 1965. Т. 165. № 4.
20. *Гиллемин Э. А.* Синтез пассивных цепей. М.: Связь, 1970. 720 с.
21. *Булгаков Б. В.* Колебания. М.: ГИТТЛ, 1954.
22. *Барабанов А. Т.* Полное решение общей проблемы Рауса в теории регулирования // ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 5.
23. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. М.: Наука 1984.

Севастополь

Поступила в редакцию
21.I.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 • 1991

УДК 62-50

А. В. ТИМОФЕЕВ

СВОЙСТВА ОБРАТИМЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ И СИНТЕЗ ВЫСОКОКАЧЕСТВЕННОГО РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается класс систем управления, модели динамики которых обратимы на подпространстве. С учетом особенностей этого класса формируются понятия и критерии управляемости, наблюдаемости, программируемости, стабилизируемости и декомпозируемости. В аналитическом виде синтезируются оптимальные программные движения и стабилизирующие их законы управления. Приводятся расчетные соотношения для выбора параметров высококачественных законов управления, обеспечивающих компенсацию динамических перекрестных связей и желаемый характер затухания переходных процессов. Получены оценки качества и робастности синтезированных законов управления при наличии параметрических и постоянно действующих возмущений.

Введение. В основе проектирования современных систем управления лежат фундаментальные понятия и методы теории управления. Однако в отличие от теории линейных систем, где эти понятия и методы глубоко разработаны [1–4], в теории нелинейных систем еще не сложилась единая терминология в отношении таких важнейших понятий, как управляемость, наблюдаемость, стабилизируемость, декомпозируемость, робастность и т. п. Между тем методы и результаты теории управления существенно зависят от принятых определений и свойств моделей динамики исследуемых систем.

В статье рассматривается класс нелинейных систем управления, модели динамики которых обладают свойством обратимости на подпространстве. С учетом специфических особенностей этого класса формулируются понятия и критерии управляемости, наблюдаемости, программируемости, стабилизируемости и декомпозируемости. Синтезируются в аналитическом виде программные движения и стабилизирующие их робастные законы управления, обеспечивающие желаемый характер затухания переходных процессов и компенсацию динамических перекрестных связей. Предлагаются методы синтеза и приводятся расчетные соотношения для построения высококачественных законов управления, робастных в заданном классе параметрических и постоянно действующих возмущений. Излагаемые результаты существенно дополняют, обобщают и систематизируют результаты, ранее полученные в [5–17].

1. Модели динамики, обратимые на подпространстве. Рассмотрим модель динамики системы управления, описываемую векторным дифференциальным уравнением в форме Коши

$$\dot{x}=F(x, u, \xi), \quad x(t_0)=x_0, \quad t\in[t_0, t_T] \qquad (1.1)$$

Здесь x—n-мерный вектор состояния, u—m-мерный вектор управления, ξ—p-мерный вектор параметров, $\dot{x}$ – производная x по t, x_0 – начальное состояние, $T=t_T-t_0$ – конечное или бесконечное время движения, F—n-мерная вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования и единственности решения (1.1) при фиксированных x_0, u и ξ. Обозначим через Q_ξ ограниченное замкнутое множество допустимых значений вектора параметров ξ.

Будем говорить, что модель динамики (1.1) имеет *постоянную структуру* на Q_ξ, если множество

$$P_F(\xi)=\{(x, F(x, u, \xi)): x\in R^n, \quad u\in R^m\} \tag{1.2}$$

не зависит от ξ из Q_ξ, т. е.

$$P_F(\xi_1)=P_F(\xi_2) \text{ для любых } \xi_1, \xi_2\in Q_\xi. \tag{1.3}$$

В этом случае семейство управляемых движений $x=x(t_0, t, x_0, u, \xi)$ модели (1.1) не зависит от того, какое значение принимает вектор параметров ξ из множества Q_ξ.

Предположим, что модель динамики (1.1) с постоянной структурой удовлетворяет следующему условию: для любых чисел c_0, $c_1\in R^1$ и любых векторов x_0, $x_1\in R^n$ и u_1, $u_2\in R^m$ существует вектор $u\in R^m$ такой, что

$$c_0F(x_0, u_0, \xi)+c_1F(x, u_1, \xi)=F(c_0x_0+ +c_1x_1, u\xi). \tag{1.4}$$

Тогда модель динамики будем называть *квазилинейной по состоянию*. Очевидно, что в рассматриваемом классе моделей множество (1.2) является *подпространством* в R^{2n}.

Будем говорить, что модель динамики (1.1), (1.4) *обратима относительно управления на подпространстве* (1.2), если существует оператор

$$U: P_F\times Q_\xi\to R^m \tag{1.5}$$

такой, что для любых $(x, z)\in P_F$, $\xi\in Q_\xi$ справедливо тождество

$$z\equiv F(x, U(x, z, \xi), \xi).$$

Свойством обратимости на подпространстве обладает широкий класс моделей динамики непрерывных систем управления. Явный вид оператора U и подпространства P_F для линейных управляемых систем и некоторых типов нелинейных механических и электромеханических систем получены в [5—11].

Обратная модель динамики системы управления (1.1) имеет вид

$$U(x, \dot{x}, \xi)=u, \ (x, \dot{x})\in P_F, \ x(t_0)=x_0, \ t\in[t_0, t_T]. \tag{1.6}$$

Она эквивалентна исходной (прямой) модели (1.1)—(1.5) в форме Коши. Однако обратная модель более удобна для синтеза, оптимизации и анализа законов управления. Поэтому в дальнейшем существенно используется сформулированное свойство обратимости моделей динамики систем управления вида (1.1).

Примером класса обратимых моделей могут служить модели, описываемые системой дифференциальных уравнений в разрешенной относительно управления форме

$$\begin{gathered} P(q, \xi)q^{(r)}+R(q, \dot{q}, \ldots, q^{(r-1)}, \xi)=u, \\ q(t_0)=q_0, \ldots, q^{(r-1)}(t)=q_0^{(r-1)}, \qquad t\geqslant t \end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь q — m-мерный вектор управляемых координат, $q^{(j)}$ — его j-я производная по t, $j=1, 2, \ldots, r$, u—m-мерный вектор управления, $P(\cdot)$ и $R(\cdot)$ — заданные матричная и векторная функции размерности $m\times m$ и m соответственно, причем матрица $P(q, \xi)$ является положительно определенной при всех возможных q и $\xi\in Q_\xi$. При $r=2$ уравнение (1.7) описывает динамику голономных механических систем с m степенями свободы, управляемых моментными двигателями, при $r\geqslant 3$ — динамику электромеханических систем с двигателями постоянного тока с жесткими или упругими редукторами [10, 12].

Введем переменные состояния

$$x_1=q, \quad x_2=\dot{x}_1, \quad x_3=\dot{x}_2, \ldots, x_n=\dot{x}_{n-1} \tag{1.8}$$

и новое (вспомогательное) управление

$$v=P^{-1}(x_1, \xi)[u-R(x_1, x_2, \ldots, x_n, \xi)]. \tag{1.9}$$

Тогда вектор x размерности $n=rm$ с компонентами (1.8) будем называть каноническим. Систему (1.7) можно записать в эквивалентной форме

$$\dot{x}=A_0x+B_0v, \quad x(t_0)=x_0, \tag{1.10}$$

где

$$A_0=\begin{pmatrix} 0_{n-m}^m & I_{n-m} \\ 0_m{}^m & 0_m^{n-m} \end{pmatrix}, \quad B_0=\begin{pmatrix} 0_{n-m}^m \\ I_m{}^m \end{pmatrix}. \tag{1.11}$$

Здесь 0_i^j — нулевая матрица размерности $i\times j$, I_i — единичная матрица размерности i.

Модель динамики вида (1.8)—(1.11) назовем *канонической формой* представления исходной системы (1.7). Для этой системы обратная модель динамики имеет вид (1.6), где

$$U=P(x_1, \xi)\dot{x}_n+R(x_1, x_2, \ldots, x_n\xi), \tag{1.12}$$

$$P_F=\{(x, z): x_2=z_1, x_3=z_2, \ldots, x_n=z_{n-1}\}. \tag{1.13}$$

В частном случае, когда P не зависит от x, а R линейна по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получаем модель линейной динамической системы управления в канонической форме (1.8)—(1.11). Очевидно, что для нее существует обратная модель вида (1.6), (1.12) и (1.13) [5].

2. Управляемость и наблюдаемость обратимых моделей. Пусть задан некоторый желаемый закон изменения во времени вектора состояний системы (1.1). Обозначим его через

$$x_p=x_p(t), \quad t\geqslant t_0, \tag{2.1}$$

где $x_p(t)$ — непрерывно дифференцируемая n-мерная вектор-функция.

Будем говорить, что система (1.1) *программно управляема*, если существует закон управления, обеспечивающий движение $x=x_p(t)$. В этом случае будем называть (2.1) *программным движением* (ПД) системы (1.1). Если модель динамики обратима на подпространстве, то соответствующий закон программного управления имеет вид

$$u_p=U(x_p, \dot{x}_p, \xi), \quad t\geqslant t_0. \tag{2.2}$$

Очевидно, что в силу единственности решения системы (1.1) закон программного управления (2.2) обеспечивает движение $x=x_p(t)$ при начальном условии $x_p(t_0)=x_0$.

Заметим, что этим же свойством обладает и закон управления с обратной связью вида

$$u=U(x, \dot{x}_p, \xi), \quad t\geqslant t_0. \tag{2.3}$$

Программная управляемость является весьма сильным свойством системы (1.1), гарантирующим осуществимость любого ПД. Однако во многих задачах управления требуется более слабое свойство, аналогичное свойству управляемости по Калману в теории линейных систем [1, 2].

Будем называть модель динамики (1.1) *глобально управляемой*, если для любых двух состояний x_0, $x_1\in R^n$ существует закон управления такой, что соответствующее ему решение системы (1.1) удовлетворяет граничным условиям вида

$$x(t_0)=x_0, \quad x(t_T)=x_1 \tag{2.4}$$

при некотором $t_T<\infty$. Заметим, что если для линейных систем управляемость сохраняется, когда конечный момент t_T фиксирован, то для нели-

нейных систем это, вообще говоря, не так [3]. Кроме того, задача управляемости допускает не единственное решение. Это позволяет синтезировать различные, в том числе оптимальные ПД, удовлетворяющие граничным условиям (2.4).

Глобальная управляемость нелинейных систем (1.1) тесно связана с обратимостью на подпространстве их моделей динамики. Поэтому для обратимых моделей P_F названо в [6—9] *подпространство управляемости.*

Пусть требуется перевести систему (1.1) из произвольного начального состояния x_0 в желаемое конечное состояние x_1 за время $T=t_T-t_0$. Обозначим через $\dot{x}0$ и $\dot{x}_1$ скорость изменения вектора состояния $x(t)$ в моменты t_0 и t_T соответственно. Тогда, используя свойство обратимости, найдем соответствующие «граничные» управления

$$u_0=U(x_0, \dot{x}_0, \xi), \quad u_1=U(x_1, \dot{x}_1, \xi). \tag{2.5}$$

Искомый закон управления имеет вид

$$u=u_0+(t-t_0)T^{-1}(u_1-u_0), \quad t\in[t_0, t_T]. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (1.1), получим ПД $x_p(t)$, удовлетворяющее граничным условиям (2.4). Чтобы «остановить» систему (1.1) в точке x_1 в момент t_T достаточно в (2.5) положить $\dot{x}_1=0$.

Рассмотрим теперь вопрос об управляемости систем, модель динамики которых описывается уравнением (1.7). Для ее канонического представления (1.8)—(1.11) критерий управляемости имеет вид

$$\mathrm{rank}(B_0, A_0B_0, \ldots, A_0^{n-1}B_0)=n. \tag{2.7}$$

Легко убедиться, что с учетом (1.11) соотношение (2.6) всегда выполняется. Отсюда следует управляемость системы (1.10) по отношению к вспомогательному управлению v. Но v связано с исходным управлением u взаимно однозначным преобразованием (1.9). Следовательно, управляема и исходная нелинейная система (1.7).

Сформулированное свойство глобальной управляемости основывается по существу на обратимости модели динамики рассматриваемой системы. Для аналитического синтеза искомого закона управления достаточно воспользоваться соотношениями (1.12), (1.13), (2.5), (2.6) или предварительно построить ПД $x_p(t)$, удовлетворяющее граничным условиям (2.4), и подставить его в (2.2) или (2.3).

Для реализации закона управления с обратной связью по каноническому вектору состояний (например, закона (2.3)) необходимо измерять все его компоненты вида (1.8). Однако на практике это не всегда удается. В этом случае иногда удается измерить компоненты другого вектора y той же размерности, который связан с вектором x взаимно однозначным преобразованием вида

$$x=\Phi(y, \xi). \tag{2.8}$$

Тогда для реализации закона управления с обратной связью по x достаточно воспользоваться нелинейным преобразованием пространства состояний (2.8).

В ряде случаев вместо вектора x измеряется некоторая линейная комбинация x и v вида

$$y=Dx+Cv, \quad t\geqslant t_0, \tag{2.9}$$

где D и C — заданные матрицы размерности $k\times n$ и $k\times m$ соответственно. Система (1.10), (2.9) с обратимой моделью динамики называется наблюдаемой [10], если

$$\mathrm{rank}(D^T, A_0^TD^T, (A_0^T)^2D^T, \ldots, (A_0^T)^{n-1}D^T)=n. \tag{2.10}$$

Выполнение условия наблюдаемости (2.10) обеспечивает возможность реализации законов управления с обратной связью по вектору «выходов» y, когда измерению доступны лишь его компоненты вида (2.9).

3. Программирование и оптимизация движений обратимых моделей. Цель управления обычно заключается в осуществлении некоторого желаемого движения, называемого ПД. Однако не всякое желаемое движение осуществимо. Поэтому ПД $x_p(t)$, $t \geqslant t_0$ необходимо должно быть частным решением уравнения (1.1) при некотором допустимом управлении независимо от того, какие конкретные значения принимает вектор параметров $\xi \in Q_\xi$. Как отмечалось выше, постоянство структуры модели динамики (1.1) обеспечивает неизменность семейства частных решений уравнения (1.1), а значит, и класса ПД при изменении ξ внутри Q_ξ.

Анализ того, что данная функция $x_p(t)$, $t \geqslant t_0$ является ПД, на практике бывает затруднителен. Для решения этой задачи удобен следующий критерий: кусочно-непрерывная дифференцируемая функция $x_p(t)$ является частным решением уравнения динамики обратимой модели (1.1), если она удовлетворяет структурному ограничению

$$(x_p(t), \dot{x}_p(t)) \in P_F, \quad t \geqslant t_0. \tag{3.1}$$

Сформулированный критерий показывает, что все возможные ПД обратимых моделей исчерпываются вектор-функциями, удовлетворяющими ограничению (3.1). Важно отметить, что подпространство P_F не зависит от управления и целиком определяется вектор-функцией F в (1.1). Это позволяет разделить задачу управления движением на две самостоятельные задачи. Первая задача — построение ПД, вторая — синтез закона управления, стабилизирующего ПД с заданными показателями качества.

Первая задача обычно формируется следующим образом. Построить кусочно-непрерывную дифференцируемую вектор-функцию $x_p(t)$, удовлетворяющую структурному ограничению (3.1), граничным условиям (2.4) и ограничениям вида

$$x_p(t) \in Q_x, \quad t \in [t_0, t_{\text{T}}], \tag{3.2}$$

$$\dot{x}_p(t) \in Q_{\dot{x}}, \quad t \in [t_0, t_{\text{T}}], \tag{3.3}$$

где Q_x, $Q_{\dot{x}}$ — заданные ограниченные множества в R^n.

Задача построения ПД может иметь много решений. Для выбора среди них наилучшего ПД зададим функционал качества ПД вида

$$K[x_p(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_{\text{T}}} G(x_p(t), \dot{x}_p(t))\, dt. \tag{3.4}$$

Тогда оптимизация ПД сводится к выбору такого ПД $x_p^0(t)$, на котором функционал (3.4) принимает наименьшее возможное значение.

Для решения сформулированных задач можно воспользоваться методом параметрического синтеза и оптимизации ПД [5, 7]. Основная идея метода заключается в специальной *параметризации* ПД, обеспечивающей выполнение граничных условий (2.4) и структурного ограничения (3.1). В результате задача программирования и оптимизации движений обратимой модели (1.1) трансформируется в некоторую сравнительно простую задачу нелинейного программирования.

Одним из эффективных способов параметризации ПД является его представление в виде

$$x_p(t) = a_0(t) + \sum_{j=1}^{N} \varkappa_j a_j(t), \qquad t \in [t_0, t_{\text{T}}], \tag{3.5}$$

где $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_N$ — искомые параметры, а $a_0(t)$, $a_1(t), \ldots, a_N(t)$ — заданные непрерывно дифференцируемые на интервале $[t_0, t_{\text{T}}]$ базисные n-мер-

ные вектор-функции, такие, что

$$a_0(t_0)=x_0, \quad a_0(t_T)=x_1, \tag{3.6}$$

$$a_i(t_0)=a_i(t_T)=0, \quad i=1, 2, \ldots, N, \tag{3.7}$$

$$(a_j(t), \dot{a}_j(t))\in P_F, \quad t\in[t_0, t_T], \quad j=0, 1, \ldots, N. \tag{3.8}$$

Очевидно, что выполнение граничных условий (2.4) для ПД (3.5) является прямым следствием соотношений (3.6), (3.7). Ввиду того, что P_F — линейное подпространство и справедливо (3.8), ПД (3.5) автоматически удовлетворяет структурному ограничению (3.1). Примеры выбора базисных функций со свойствами (3.6)—(3.8) имеются в [5, 7, 10].

В результате рассмотренной параметризации задача построения ПД сводится к решению системы неравенств относительно параметров $\varkappa_1$, $\varkappa_2, \ldots, \varkappa_N$, получаемой в результате подстановки (3.5) в ограничения (3.2), (3.3). Конечно-сходящиеся алгоритмы решения этих неравенств в случае, когда Q_x и $Q_{\dot{x}}$ являются выпуклыми множествами, предложены в [1, 10].

Подставляя (3.5) в (3.4), убеждаемся, что функционал качества превращается в некоторую функцию искомых параметров, т. е.

$$K[x_p(\cdot)]=I(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_N). \tag{3.9}$$

Поэтому задача оптимизации ПД сводится к решению следующей задачи нелинейного программирования:

$$I(\varkappa_1^0, \varkappa_2^0, \ldots, \varkappa_N^0)=\min I(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_N) \tag{3.10}$$

при ограничениях (3.2), (3.3) на ПД (3.5).

Полученная задача существенно проще задачи оптимального программного управления системой (1.1). Для ее решения можно использовать известные методы нелинейного программирования или композицию конечно-сходящихся алгоритмов градиентного типа [1, 10]. Подставляя найденные значения параметров в (3.5), получим оптимальное (в заданном классе базисных функций) ПД. Заметим, что точность решения исходной вариационной задачи построения оптимального ПД может быть сделана сколь угодно высокой за счет выбора достаточно большого числа N линейно независимых базисных функций.

Достоинством описанного метода программирования и оптимизации движений обратимых моделей динамики является то, что ПД строится в аналитическом виде так, что гарантируется выполнение граничных условий (2.4) и ограничений (3.1)—(3.3). Кроме того, предложенный метод достаточно гибкий: изменение граничных условий (2.4) влечет за собой лишь изменение базисных функций (точнее, функций $a_0(t)$), а изменение ограничений (3.2), (3.3) порождает соответствующую коррекцию параметров ПД без изменения его структуры, что обеспечивает автоматическое выполнение структурного ограничения (3.1).

Ограничения (3.2), (3.3) на ПД определяют и ограничения на вектор состояния x и его производную $\dot{x}$. Последние порождают соответствующие ограничения на вектор управления. Учитывая обратимость модели динамики (1.1), из соотношения (1.5) получаем

$$U:\ ((Q_x\times Q_{\dot{x}})\cap P_F)\times Q_\xi\to Q_u. \tag{3.11}$$

Отсюда следует, что допустимые управления должны удовлетворять ограничению вида

$$u(t)\in Q_u, \quad t\in[t_0, t_T] \tag{3.12}$$

4. Стабилизируемость и декомпозируемость обратимых моделей. Управляемость обратимых систем обеспечивает возможность стабилизации заданного конечного состояния x_1 или ПД $x_p(t)$, $t\geqslant t_0$. Будем называть си-

стему (1.1) *стабилизируемой*, если существует закон управления, обеспечивающий асимптотическую устойчивость заданного состояния или ПД.

Методы синтеза стабилизирующих законов управления для обратимых систем предложены в [5—12]. Один из этих методов основан на принципе скоростного управления ПД в соответствии с заданным (эталонным) уравнением затухания переходных процессов (ПП) $E=x-x_p$ [8]. Благодаря обратимости модели динамики (1.1) он позволяет синтезировать стабилизирующий закон управления в аналитическом виде [5—8]

$$u=U(x, \dot{x}+\Gamma E, \xi), \quad t\geqslant t_0, \tag{4.1}$$

где Γ — устойчивая матрица коэффициентов усиления размера $n\times n$, удовлетворяющая структурному ограничению

$$(x, \ \Gamma x)\in P_F, \quad t\geqslant t_0. \tag{4.2}$$

Подставляя (4.1) в (1.1), получаем дифференциальное уравнение замкнутой системы

$$\dot{E}=\Gamma E, \quad E(t_0)=E_0, \quad t\geqslant t_0. \tag{4.3}$$

Уравнение (4.3) определяет желаемый (эталонный) характер затухания ПП. Ввиду устойчивости матрицы Γ, удовлетворяющей также структурному ограничению (4.2), нулевое решение (4.3), а значит, и ПД $x_p(t)$ асимптотически устойчив в целом. Для динамической ошибки справедлива оценка

$$\|E(t)\|\leqslant c_\Gamma\|E(t_0)\| \exp [\lambda_\Gamma(t-t_0)], \quad t\geqslant t_0, \tag{4.4}$$

где c_Γ — положительное число, λ_Γ — наибольшая действительная часть собственных чисел $\lambda_i(\Gamma)$ матрицы Γ, т. е. $\lambda_\Gamma=\max\limits_i \operatorname{Re}\lambda_i(\Gamma)$.

За счет выбора параметров матрицы Γ можно обеспечить, чтобы замкнутая система (4.3) имела любой *наперед заданный спектр*. Тем самым обеспечивается возможность модального управления обратимыми системами. Закон стабилизации ПД вида (4.1) позволяет за счет выбора матрицы Γ получить ПП с наперед заданными показателями качества ПП, включая оптимальное демпфирование ПП.

Рассмотрим стабилизируемость ПП в системах управления (1.7), имеющих представление (1.10). Из критерия управляемости (2.7) следует, что существует $m\times n$-матрица C такая, что $n\times n$-матрица

$$\Gamma=A_0+B_0C \tag{4.5}$$

устойчива [4]. Очевидно, что для обратимых систем матрица Γ должна удовлетворять структурному ограничению (4.2). Легко убедиться, что стабилизирующий закон управления имеет вид

$$u=P(x_1, \xi)(B_0{}^{\mathrm{T}}\dot{x}_p+CE)+R(x, \xi), \quad t\geqslant t_0. \tag{4.6}$$

Вследствие программной управляемости системы (1.10) стабилизирующим является и закон управления

$$u=u_p+CE, \quad t\geqslant t_0, \tag{4.7}$$

где u_p определяется из (4.6) путем подстановки $x=x_p$.

Синтезированные законы управления обеспечивают *асимптотическую устойчивость в целом* не только ПД $x_p(t)$, $t\geqslant t_0$, но и заданного конечного состояния x_1. В последнем случае в них достаточно положить $x_p(t)=x_1$.

Важнейшими показателями качества ПП является точность ε осуществления ПД и время затухания ПП T_p. Оценим время затухания ПП при заданной точности ε стабилизации. Используя соотношение (4.4), получим

$$T_p\equiv t_p-t_0\leqslant|\lambda_\Gamma|^{-1} \ln c_\Gamma\|E(t_0)\|\varepsilon^{-1}, \tag{4.8}$$

где t_p — первый момент времени, начиная с которого $\|E(t)\|$ не превышает ε.

Многомерным обратимым системам управления (1.1) присущи *перекрестные связи*, интенсивность взаимовлияния которых зависит от текущего состояния. Будем говорить, что система (1.1) *декомпозируема*, если существует стабилизирующий закон управления, при котором уравнение ПП в замкнутой системе распадается на систему независимых уравнений по управляемым координатам.

Рассмотрим систему (1.1), в которой вектор состояний имеет канонический вид (1.8). Тогда закон управления (4.1) является декомпозирующим, если $n \times n$-матрица коэффициентов усиления имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0_{n-m}^{m} & I_{n-m} \\ & C \end{pmatrix}$$

$$C = (c_i)_{i=0}^{r-1}, \qquad c_i = \operatorname{diag}(\gamma_{1,i}, \ldots, \gamma_{m,i}). \tag{4.9}$$

Здесь $m \times n$-матрица C составлена из r диагональных $m \times m$-подматриц. В этом случае структурное ограничение (4.2) выполнено на подпространстве (1.13), а уравнение ПП (4.3) распадается по каждой управляемой координате на независимые дифференциальные уравнения r-го порядка

$$e_j^{(r)} = \gamma_{j,r-1} e_j^{(r-1)} + \ldots + \gamma_{j,1} \dot{e}_j + \gamma_{j,0} e_j,$$
$$j = 1, 2, \ldots, m, \tag{4.10}$$

где $e_j = q_j(t) - q_{p,j}(t)$.

5. Синтез высококачественных законов управления. Качество управления определяется качеством (критерием оптимальности) ПД и характером затухания ПП при отработке ПД. Построение высококачественных законов управления для обратимых моделей динамики осуществляется в два этапа: структурный синтез ПД и закона управления и расчет их параметров (параметрический синтез).

Метод структурного и параметрического синтеза оптимальных ПД рассмотрен в разд. 3. Структурный синтез законов управления, обеспечивающих стабилизацию ПД и декомпозицию ПП, описан в разд. 4. Поэтому здесь рассмотрим задачу параметрического синтеза законов управления, обеспечивающих наперед *заданные показатели качества* ПП.

Важнейшими показателями качества управления является точность осуществления ПД, характер и время затухания ПП. Исходя из этих показателей, можно получить различные схемы параметрического синтеза и конкретные расчетные соотношения.

Рассмотрим стабилизирующий закон управления вида (4.1) с декомпозирующей матрицей коэффициентов усиления (4.9). Тогда уравнение ПП (4.3) распадается на систему m независимых линейных дифференциальных уравнений (4.10) r-го порядка. Качество ПП определяется коэффициентами $\gamma_{j,i}$, $j=1, 2, \ldots, m$, $i=0, 1, \ldots, r-1$ этого уравнения, которые играют роль коэффициентов усиления в каналах обратной связи при управлении (4.1), (4.9).

Пусть слева от мнимой оси комплексной плоскости задан спектр матрицы Г. Зная спектр, легко рассчитать соответствующие элементы матрицы Г, являющиеся коэффициентами системы уравнений (4.1). Таким образом, для обратимых моделей динамики (1.1) (вообще говоря, нелинейных) синтезируются законы модального управления. При этом характер затухания ПП в замкнутой системе целиком определяется заданным спектром матрицы Г. Варьируя этот спектр, можно получить ПП, удовлетворяющие заданным показателям качества.

В практически важном случае, когда $r=3$, исчерпывающий ответ на вопрос, как выбрать параметры $\gamma_{j,i}$, чтобы обеспечить желаемый характер затухания ПП, дают диаграммы Вышнеградского. Они определя-

ют в пространстве параметров

$$\alpha_j = -\frac{\gamma_{,2}}{\sqrt[3]{-\gamma_{,0}}}, \quad \beta_j = -\frac{\gamma_{,1}}{\sqrt[3]{\gamma^2_{,0}}}, \quad j=1, 2, \ldots, m, \tag{5.1}$$

области устойчивости вида

$$\alpha_j > 0, \quad \beta_j > 0, \quad \alpha_j \beta_j > 0, \tag{5.2}$$

а в них — три области с различным характером затухания ПП [13]. Вид ПП зависит от конкретного расположения корней нормированного характеристического уравнения вида

$$y^3 + \alpha_j y^2 + \beta_j y + 1 = 0. \tag{5.3}$$

Наибольшая степень устойчивости (понимаемая как абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня) достигается в точке $\alpha_j = \beta_j = 3$. В этой точке корни нормированного уравнения (5.3) равны -1, а корни характеристического уравнения для (4.10) при $r=3$ соответственно равны

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt[3]{-\gamma_{j,0}} \tag{5.4}$$

Отсюда следует, что для получения быстрого затухания ПП апериодического характера целесообразно выбирать параметры α_j, β_j вблизи точки $\alpha_j = \beta_j = 3$.

В общем случае (при $r \geqslant 2$) характер затухания ПП можно оценить с помощью совокупности безразмерных параметров вида [13]

$$\delta_{j,i} = \gamma^2_{j,i} (\gamma_{j,i-1} \gamma_{j,i+1})^{-1}, \quad i=1, 2, \ldots, r-1, \tag{5.5}$$

где $\gamma_{j,r} = -1$. Так, критерием получения ПП апериодического характера является выполнение следующей системы неравенств:

$$\delta_{j,i} \geqslant 4, \quad i=1, 2, \ldots, r-1, \ j=1, 2, \ldots, m, \tag{5.6}$$

при условии, что все коэффициенты уравнения (4.10) имеют одинаковые знаки. В этом случае все корни характеристического многочлена для (4.10) будут вещественными и отрицательными.

Если ПП имеет колебательный характер, то это означает, что среди корней характеристического уравнения системы (4.10) имеются комплексные. При этом показателем колебательности для комплексного корня λ_j служит величина

$$\mu_j = \operatorname{Im} \lambda_j (\operatorname{Re} \lambda_j)^{-1}. \tag{5.7}$$

Задание определенного показателя колебательности μ ограничивает область расположения корней двумя лучами, составляющими с вещественной осью угол

$$\varphi_j = \operatorname{arc\,tg} \mu_j. \tag{5.8}$$

Если спектр матрицы Γ задан, то легко определить угловой спектр $\pm\varphi_j$ колебательности ПП, охватывающий весь спектр. Необходимым условием расположеиня корней характеристического уравнения для (4.10) в секторе $\pm\varphi_j$ является выполнение следующей системы неравенств [13]:

$$\delta_{j,i} \geqslant (r-i+1)(i+1)(r-i)^{-1} i^{-1} \cos^2 \varphi_j, \quad r=1, 2, \ldots, r-1. \tag{5.9}$$

Для обеспечения заданного времени затухания ПП нужно иметь определенный запас устойчивости $-\gamma$ в замкнутой системе (4.10), т. е. $\operatorname{Re} \lambda_i(\Gamma) < -\gamma$, $i=1, 2, \ldots, n$. Достаточное условие получения заданного

запаса устойчивости имеет вид [13]

$$\gamma_{j,\,0}-\gamma_{j,\,1}+2\gamma_{j,\,2}\lambda^2\geqslant 0,$$
$$\gamma_{j,\,k-i}\gamma_{j,\,k+2}[\gamma_{j,\,k}-\gamma_{j,\,k+1}(r-k-1)\gamma]^{-1}[\gamma_{j,\,k+1}-$$
$$-\gamma_{j,\,k+2}(r-k-2)\gamma]<0{,}465, \tag{5.10}$$
$$\gamma_{j,\,i}\geqslant\gamma_{j,\,i+1}(r-i-1)\gamma,\quad i=1,\,2,\,\ldots,\,r-1,\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,r-2.$$

Таким образом, получены расчетные соотношения для выбора коэффициентов усиления в стабилизирующем законе управления (4.1), (4.9), исходя из заданных показателей качества ПП в замкнутой системе.

6. Робастность и адаптивность систем с обратимыми моделями динамики. Для реализации синтезированных законов и управления вида (4.1), (4.9) нужно знать вектор параметров ξ. Однако на практике он часто не только неизвестен, но и может непредсказуемо изменяться в заданном множестве Q_ξ. В этом случае приходится формировать некоторую правдоподобную оценку τ_0 неизвестного вектора ξ и подставлять ее в (4.1). В результате получаем следующий закон управления:

$$u=U(x,\ \dot{x}_p+\Gamma E,\ \tau_0),\quad t\geqslant t_0. \tag{6.1}$$

Подставляя (6.1) в (1.1), убеждаемся, что ПП в замкнутой системе будет зависеть от параметрических возмущений (ПВ) $\omega=\xi-\tau_0$. ПВ неблагоприятно влияют на характер ПП и качество управления. Они могут приводить к ухудшению точности и быстродействия, автоколебаниям, параметрическому резонансу или потере устойчивости. В результате возникают сбои и отказы, снижающие эффективность и надежность системы управления.

Проанализируем влияние ПВ на динамику замкнутой системы (1.1), (6.1) в случае, когда ПВ не нарушают устойчивость ПД. Можно показать [1, 10], что при этом ПП удовлетворяют оценке

$$\|E(t)\|\leqslant c_\Gamma\|E(t_0)\|\exp[\lambda_\Gamma(t-t_0)]+c_\Gamma L|\lambda_\Gamma|^{-1}\|\omega\|,\ t\geqslant t_0, \tag{6.2}$$

где L — константа Липшица вектор-функции F по третьему аргументу. Из (6.2) следует, что точность осуществления ПД принципиально ограничена уровнем ПВ. Если этот уровень c_ω таков, что требуемая точность ε достигается, что это означает, что закон управления (6.1) нечувствителен к ПВ из заданного класса: $\|\omega\|\leqslant c_\omega$, характеризующегося параметром c_ω. Будем называть такие законы управления *робастными* (грубыми) в заданном классе.

Гарантированная точность отработки ПД при робастном управлении (6.1) ограничена величиной

$$\varepsilon_0=c_\Gamma L|\lambda_\Gamma|^{-1}c_\omega. \tag{6.3}$$

Качество управления зависит не только от характера и уровня ПВ, но и от постоянно действующих возмущений (ПДВ), воздействующих на динамику системы (1.1). При наличии аддитивных ПДВ $\pi(t)$ модель динамики имеет вид

$$\dot{x}=F(x,\ u,\ \xi)+\pi,\ x(t_0)=x_0,\ t\geqslant t_0. \tag{6.4}$$

Естественно предполагать, что ПДВ не изменяют структуру обратимой системы (1.1). Это означает, что ПДВ удовлетворяют структурному ограничению

$$(0,\ \pi)\in P_F\ \text{при всех}\ t\geqslant t_0. \tag{6.5}$$

На практике ПДВ неизвестны и не могут быть измерены. Однако они всегда ограничены, т. е.

$$\|\pi(t)\|\leqslant c_\pi,\ t\geqslant t_0, \tag{6.6}$$

где c_π — параметр, характеризующий степень неопределенности ПДВ.

Проанализируем совместное влияние ПВ и ПДВ на качество ПП и оценим степень робастности закона управления (4.1). Поскольку уравнение динамики замкнутой обратимой системы (6.4), (4.1) имеет вид

$$\dot{E}=\Gamma E+F(x,\ u,\ \xi)-F(x,\ u,\ \tau_0)+\pi, \tag{6.7}$$

то легко получить следующую оценку ПП:

$$\|E(t)\|\geqslant c_\Gamma\|E(t_0)\exp[\lambda_\Gamma(t-t_0)]+c_\Gamma|\lambda_\Gamma|^{-1}(Lc_\omega+c_\pi),\qquad t\geqslant t_0. \tag{6.8}$$

Эта оценка справедлива при условии, что ПД в системе (6.7) устойчиво. Гарантированная точность отработки ПД при совместном действии ПВ и ПДВ ограничена величиной

$$\varepsilon_*=c_\Gamma|\lambda_\Gamma|^{-1}(Lc_\omega+c_\pi). \tag{6.9}$$

Если параметры закона управления (6.7) выбраны так, что $\varepsilon_*<\varepsilon$, то система будет робастной в заданном классе ПВ и ПДВ. Это означает, что замкнутая система (6.4), (6.1) не чувствительна к ПВ и ПДВ из заданного класса, характеризуемого параметрами c_ω и c_π. Поэтому она является ε-инвариантной по отношению к ПВ и ПДВ.

В тех случаях, когда характер и уровень ПВ и ПДВ таковы, что ПД в замкнутой системе неустойчивы, необходима автоматическая адаптация закона управления (6.1). Она позволяет оперативно компенсировать неблагоприятное влияние ПВ и ПДВ и улучшить качество ПП путем самонастройки параметров τ или коэффициентов усиления Γ в законе управления (6.1).

Цель адаптации заключается в гашении ПВ и ПДВ. Для достижения этой цели необходимо синтезировать алгоритмы адаптации, на траектории которых ПВ и ПДВ монотонно убывают.

Робастные законы управления вида (6.1) вместе с алгоритмами адаптации будем называть *адаптивными* в заданном классе неопределенности, если они гарантируют достижение цели управления для любых возможных ПВ и ПДВ. Таким образом, синтез законов адаптивного управления сводится к синтезу эффективных алгоритмов адаптации. Методы построения и оптимизации таких алгоритмов с конечным временем адаптации рассмотрены в [5—7, 10, 11].

Разработанные методы и высококачественные алгоритмы управления движением систем с обратимыми моделями динамики успешно применялись при расчете, моделировании и реализации конкретных систем робастного управления для различных типов манипуляционных, транспортных и контрольно-измерительных роботов [14—17]. Полученные практические результаты свидетельствуют о том, что при определенном уровне неконтролируемых параметрических и постоянно действующих возмущений системы робастного управления обеспечивают требуемое высокое качество ПП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронов А. А.* Устойчивость, управляемость, наблюдаемость. М.: Наука, 1979.
2. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.
3. *Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989.
4. *Зубов В. И.* Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Машиностроение, 1980.
5. *Тимофеев А. В.* Построение адаптивных систем управления программным движением. Л.: Энергия, 1980.
6. *Тимофеев А. В.* Адаптивная стабилизация программных движений и оценка времени адаптации // ДАН СССР, 1979. Т. 248. № 3.
7. *Тимофеев А. В.* Параметрическая оптимизация программных движений и адаптивное терминальное управление // ДАН СССР. 1981. Т. 256. № 2.
8. *Попов Е. П., Тимофеев А. В.* Принцип скоростного управления в задаче аналитического синтеза автоматов стабилизации // ДАН СССР, 1981. Т. 256. № 5.
9. *Попов Е. П., Тимофеев А. В.* Управляемость на подпространстве и адаптивные модельные регуляторы // ДАН СССР, 1983. Т. 273. № 5.

10. *Тимофеев А. В.* Управление роботами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986.
11. *Тимофеев А. В.* Синтез адаптивных регуляторов с помощью функций Ляпунова // ДАН СССР, 1984. Т. 274. № 2.
12. *Тимофеев А. В.* Адаптивное управление роботами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 1.
13. *Петров Б. Н., Соколов Н. И., Липатов А. В. и др.* Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1986.
14. *Гинзбург А. Р., Тимофеев А. В.* Об адаптивной стабилизации программных движений голономных и неголономных механических систем. // ПММ. 1977. Т. 41. № 5.
15. *Малышев В. В., Тимофеев А. В.* Динамика манипуляторов и адаптивное управление // АиТ. 1984. № 9.
16. *Тимофеев А. В.* Адаптивное управление робототехническими комплексами. М.: Машиностроение, 1988.
17. *Тимофеев А. В.* Робастное и адаптивное управление роботами и технологическим оборудованием. Нови Сад: НИС, 1989.

Ленинград

Поступила в редакцию
26.X.1989

после доработки
29.I.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

МЕТОДЫ И ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.58

А. В. ФОМЕНКО

СИНТЕЗ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛЕЙ МЕДЛЕННЫХ И БЫСТРЫХ ЭКСТРЕМАЛЕЙ

Рассматриваются вопросы построения субоптимального управления по принципу обратной связи. Предложен подход исследования сингулярно возмущенных систем на основе одномерных интегральных многообразий установившихся движений. Введены модальные функции, позволяющие выделять в экстремали регулярные и сингулярные составляющие и формировать соответствующие поля.

Введение. Рассматриваются вопросы построения субоптимального управления по принципу обратной связи для объекта, описываемого системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с малым параметром при части производных. В таких задачах проблемы оптимального синтеза осложняются наличием медленных и быстрых составляющих движения управляемого процесса. Для преодоления возникающих трудностей предложен подход исследования сингулярных возмущений с помощью одномерных интегральных многообразий установившихся движений. Анализируется задача об автопилоте продольного канала самолета для гашения малых вертикальных ускорений.

1. Постановка задачи. Пусть управляемый процесс описывается системой ОДУ с сингулярными возмущениями

$$x'=f(t, x, y, u), \ \varepsilon y'=g(t, x, y, u), \ t\in[t_0, T], \qquad (1.1)$$

где $x\in R^n$, $y\in R^m$, $u\in R^r$, $0<\varepsilon\ll1$ — малый параметр.

Ставится задача управляемого перевода фазовой точки системы (1.1) в некоторое состояние $x(T)$, $y(T)$ из области достижимости при $t=T$ и доставляющего минимум функционалу качества

$$J(u)=G(X(T), \ \varepsilon y(T)). \qquad (1.2)$$

Функции f, g, G будем считать непрерывно дифференцируемыми по всем своим аргументам. Под решением сформулированной задачи Майера будем понимать управление $u=u(t, x, y)$ в форме синтеза. Экстремалью назовем решение $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ канонической системы, включающей систему (1.1) и соотношения

$$z'=-H_x, \ \varepsilon\psi'=-H_y, \ u=U(t, x, y, z, \psi): H_u=0,$$
$$H=f^{\tau}z+g^{\tau}\psi, \ z(T)=-G_x, \ \psi(T)=-\varepsilon G_y. \qquad (1.3)$$

В теории и приложениях получили распространение специальные методы исследования сингулярно возмущенных систем управления: прямые методы [1]; методы интегральных многообразий [2]; методы усреднения (см. обзор В. Б. Колмановского, В. Г. Гайцгори в [3]).

В данной работе применяется метод синтеза оптимального управления, основанный на численных расчетах семейств экстремалей с выделением быстрых и медленных их составляющих.

2. Способ установления в задаче разделения движений. Под установившимся движением (УД) автономной динамической системы, описываемой векторным ОДУ

$$X'=F(X),\ t\in[t_0,\ T],\ X\in R^n \tag{2.1}$$

назовем такое движение, которое соответствует решению этого уравнения, зависящему явно или неявно от одной из компонент X_k, $k\in\overline{1,\ n}$ как от независимой переменной. Решение, описывающее УД, назовем установившимся (УР), а X_k — переменной установления. Одним из способов замены t на X_k является использование дифференциального соотношения

$$X_k'=\lambda q(X_k),\ \lambda - \text{const} - \text{параметр установления.} \tag{2.2}$$

Для линейных систем УР может отыскиваться в виде $X_k'=\lambda X_k$, что приводит к известному характеристическому уравнению для определения λ. Т. е. УР в линейном случае представляют при всех возможных λ компоненты фундаментального решения.

Для нестационарных систем УР отсутствуют. Можно, однако, определить УР для некоторой присоединенной системы, которая вводится по аналогии с присоединенной по А. Н. Тихонову системой [4]. Так для системы, описываемой уравнением (2.1) с $F=F(t,\ X)$ присоединенная линеаризованная система может быть получена дифференцированием уравнения (2.1) по t и обращением t, X в параметры

$$X''(\tau)=[F_t(t,\ X)/X'(t)+F_X(t,\ X)]X'(\tau). \tag{2.3}$$

В качестве переменной установления выберем компоненту X_k, для которой $X_k'(t)\neq 0$ и определим УР соотношениями

$$X_k'(\tau)=\lambda(t,\ X)X_k(\tau),\ X_j(\tau)=c_j(t,\ X)X_k(\tau),\ j\in\overline{1,\ n}, \tag{2.4}$$

где λ и c являются решениями уравнений

$$\det[B-\lambda E]=0,\ b_{jl}=F_{jX_l},\ j,\ l\neq k,\ b_{kk}=F_{kX_k}+$$
$$+F_t/X_k'(t),\ [B-\lambda E]c=0,\ c_k\equiv 1,\ E - \text{единичная матрица.} \tag{2.5}$$

Решение задачи Коши для уравнения (2.1) с начальным условием, определяемым соотношениями (2.4)—(2.5), дает описание при выбранном корне λ_j одномерного интегрального многообразия с параметром $X_k(t_0)$. Такое решение назовем продолженным УР. Наряду с этим решением представляет интерес решение задачи Коши (2.4), (2.5) при предельном переходе $\tau\to t$. Решение такой задачи существует и единственно, поскольку в соответствии с теоремой о неявной функции λ является непрерывной функцией t, X. Указанное решение $X^j(t)$ назовем модальной функцией. $X^j(t)$ не является решением задачи Коши для исходного уравнения (2.1), хотя и удовлетворяет этому уравнению при любом фиксированном $t\in[t_0,\ T]$. При использовании модальных функций для приближенного решения сингулярно возмущенных задач важное значение имеет оценка рассогласований этих функций с продолженными УР. Для получения оценки может быть использован подход теории возмущений [5]. Продолженные УР представляются набором возмущений параметров λ, c, X_k, определяемых соотношениями

$$\Delta c_j'+\Delta c_j\lambda+\Delta\lambda c_j=F_{jt}\Delta X_k/(X_k(X_k+\Delta X_k))+F_{jX}\Delta c-c_j'-\Delta c_j\Delta\lambda,$$
$$\Delta\lambda=F_{kt}\Delta X_k/(X_k(X_k+\Delta X_k))+\Delta F_{kX}\Delta c,$$
$$\Delta X_k'=\lambda\Delta X_k+\Delta\lambda X_k+\Delta\lambda\Delta X_k.$$

Эта система уравнений может быть преобразована в систему уравнений Вольтерра, для которой в случае сингулярно возмущенной системы существуют хорошие стартовые приближения. Оценки в этом случае получаются либо аналитическими методами, либо методом вычислительных доказательств.

Применение изложенного подхода к системе (1.1) приводит к характеристическому уравнению со степенным многочленом порядка $n+m$ по λ и $\leqslant m$ по ε. Используя первый этап метода диаграмм Ньютона [6], можно показать, что число n_1 регулярных корней (для λ зависящим от ε с наименьшим показателем $\mu_1 \geqslant 0$) характеристического уравнения не меньше $n-1$. Соответствующие этим λ УР и модальные функции назовем регулярными. Остальные корни (с $\mu_1<0$) и соответствующие им УР и модальные функции назовем сингулярными.

3. Применение модальных функций к решению задачи Коши. Поля экстремалей. Рассмотрим вначале стационарную задачу управления [7] (f, g не зависят явно от t и T нефиксировано). В этом случае построение синтезируемого управления осуществляется по одному полю. Используем конструкцию параметрического поля экстремалей, вычисляемых регрессивно [8]. Для задания терминальных значений переменных x, y используем $(n+m-1)$-мерный параметр s масштабированной сферической системы координат

$$x_1(T)=\rho\alpha_1 \cos s_1,\ x_2(T)=\rho\alpha_2 \sin s_1 \cos s_2,\ \ldots,\ x_n(T)=\rho\alpha_n \sin s_1 \ldots \ldots \cos s_n,\ \ldots,\ y_m(T)=\rho\alpha_{n+m} \sin s_1 \sin s_2 \ldots \sin s_{n+m-2} \sin(2s_{n+m-1}). \quad (3.1)$$

где $0 \leqslant s_i < \pi$, $i \in \overline{1,\, n+m-1}$, ρ—const.

Используем параметр установления для качественного анализа решения канонической системы (1.1), (1.3). За переменную установления выберем одну из компонент медленной составляющей решения x, x_k, $k \in \overline{1,\, n}$. Задав начальные значения x, y равными $x(T)$, $y(T)$ определяем все $2(n+m)$ корней λ характеристического уравнения. Приближенное решение канонической задачи Коши формируем в виде

$$x_j(t)=\sum_{\gamma=1}^{2(n+m)} a_j^\gamma x_k^\gamma, \qquad z_j(t)=\sum_{\gamma=1}^{2(n+m)} \eta_j^\gamma x_k^\gamma, \qquad j=1,2,\ldots,n,$$

$$y_l(t)=\sum_{\gamma=1}^{2(n+m)} b_l^\gamma x_k^\gamma, \qquad \psi_l(t)=\sum_{\gamma=1}^{2(n+m)} \vartheta_l^\gamma x_k^\gamma, \qquad l=1,2,\ldots,m,$$

где коэффициенты a_j^γ, η_j^γ, b_l^γ, ϑ_l^γ имеют смысл коэффициентов c_j из (2.4), (2.5) и определяются аналогичным образом. Для задания параметров x_k^γ в момент времени T имеются терминальные условия в (1.3), параметр s и условие принадлежности терминальной поверхности (3.1). К допустимым s отнесем те из них, для которых начальные условия $x_k^\gamma(T)$, соответствующие быстрорастущим ($\operatorname{Re}\lambda>0$) в обратном времени модальным функциям, близки к нулю. Варьируемые значения $X_k^\gamma(T)$ зададим эквивалентными величинами на левом пограничном слое $t_0+1(\varepsilon)$. Таким образом, приближенное решение канонической задачи Коши складывается на отрезке $[t_0+1(\varepsilon),\, T]$ только из регулярных и быстропадающих ($\operatorname{Re}\lambda<0$) модальных функций. Вычисление их производится по соотношениям типа (2.4), (2.5) по обычным схемам метода Эйлера (или его модификаций), причем λ рассчитываются при приближенных суммарных x, y, z, ψ. Расчет быстропадающих сингулярных мод ведется только в правом пограничном слое с шагом интегрирования порядка $0(\varepsilon)$. В левом пограничном слое к приближенному решению добавляются быстрорастущие сингулярные модальные функции, которые также вычисляются с малым шагом

интегрирования порядка $0(\varepsilon)$. Погрешность определения приближенного решения по указанной процедуре может быть оценена по общей схеме п. 2. Семейство экстремалей, непрерывно зависящее от параметра s, образует поле экстремалей [8]. Конструктивно удобно при построении синтезируемого управления выделить в поле экстремалей две составляющие — медленную и быструю. При расчете пакета экстремалей для медленного поля параметры $x_k^\gamma(T)$, соответствующие сингулярным модам, обнуляются, а для быстрого поля при фиксированных x_k^γ регулярных мод варьируются значения x_k^γ сингулярных мод. Взаимовлияние полей необходимо учитывать в пограничных слоях через параметр установления λ.

В нестационарном случае возникает необходимость построения однопараметрического семейства полей. Для этого параметр ρ подвергается дискретному разбиению и для каждого его фиксированного значения строится стационарное поле. Для детерминированной системы оптимальное движение будет осуществляться в одном стационарном поле, которое определяется интерполированием найденных узловых полей по ρ. При случайных воздействиях система будет переходить из одного стационарного поля в другое. В этом случае предложенный подход требует обоснования.

4. Построение синтезируемого управления. Пример. Разбиение поля на медленную и быструю составляющие позволяет естественно выделить на отрезке управления $[t_0, T]$ зоны их влияния: $\Omega_1=[t_0+1(\varepsilon),\ T-1(\varepsilon)]$ — для медленного поля; $\Omega_2=[t_0,\ t_0+1(\varepsilon)]$, $\Omega_3=[T-1(\varepsilon),\ T]$ — для быстрых полей. Процесс построения синтезируемого управления на участке Ω_1 по медленному полю и на участках Ω_2, Ω_3 по быстрым полям может быть осуществлен одним из способов, описанным в [8, 9]. Здесь же рассмотрим важный частный случай: $m\geqslant n$, $n_1\geqslant 2n$. Наличие малого параметра облегчает непосредственное нахождение субоптимального управления путем выделения модальных функций по измеренному состоянию x^*, y^* управляемой системы. Пусть $t\in\Omega_1$. Тогда, учитывая только регулярные моды, будем иметь равенства

$$\sum_{\gamma=1}^{2n} a_j^\gamma x_k^\gamma = x_j^*,\quad j=1,2,\ldots,n,\qquad \sum_{\gamma=1}^{2n} b_l^\gamma x_k^\gamma = y_l^*,\quad l=1,2,\ldots,m. \tag{4.1}$$

Коэффициенты a_j^γ, b_l^γ в общем случае зависят от всех канонических переменных x, y, z, ψ и должны рассчитываться при x^*, y^*, $\bar z$, $\bar\psi$, где $\bar z$, $\bar\psi$, определяются как суммы соответствующих мод. Определение a_j^γ, b_l^γ в этом случае производится по нелинейной системе (4.1), причем из второй группы уравнений удаляются $m-n$ уравнений. Предположим однозначную разрешимость получающейся системы относительно a_j^γ, b_l^γ. Синтезируемое управление получается по функции U из условий оптимальности (1.3). Если u входит в систему (1.1) аддитивно, то коэффициенты a_j^γ, b_l^γ будут зависеть только от x^*, y^* и их определение упрощается. В пограничном слое к регулярным модам необходимо добавить сингулярные моды. Если их общее число превышает $n+m$, то использование системы (4.1) недостаточно для нахождения всех мод. Для построения синтезируемого управления в этом случае можно использовать связь между регулярными модами, например, в виде приближенного (при $\varepsilon=0$) равенства $g(t,\ \bar x,\ \bar y,\ \bar u)=0$, где $\bar x$, $\bar y$ — суммы регулярных мод, а $\bar u$ — синтезируемое управление медленного поля. В том случае, когда a_j^γ, b_l^γ не могут быть определены как функции x^*, y^* аналитически, они должны аппроксимироваться по информации поля.

Методику построения синтезируемого управления продемонстрируем на примере. Пусть возмущенное движение самолета относительно горизонтального режима полета описывается следующей системой ОДУ (см. [7] задачу 3 гл. 5, где уточнен аэродинамический момент и введен демпфирующий момент)

$$x'=-x/T_0+y,\ \varepsilon y'=-c\cos x(x-u)-dy,\quad t\in[t_0,\ T],$$

где x — возмущение угла атаки, y — возмущение угловой скорости тангажа, T_0 — постоянная времени самолета при изменении подъемной силы, ε — момент инерции самолета относительно центра тяжести, c и d — безразмерные аэродинамические коэффициенты, u — произведение угла отклонения руля высоты на его эффективность. Критерий качества управления оценивается функционалом

$$J=\frac{1}{2}[x^2(T)+\varepsilon y^2(T)]+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}u^2\,dt.$$

Модальные функции канонической системы задаются соотношениями

$$x'=\lambda x,\ y=\beta x,\ z=\nu x,\ \psi=\xi x,\ \lambda=\beta-1/T_0,$$
$$\varepsilon\beta\lambda=\xi c^2\cos^2 x-c\cos x-d\beta,\ \nu\lambda=\nu/T_0-c[\sin(x-\xi\,x\cos x)-$$
$$-\cos x]\xi,\ \varepsilon\xi\lambda=-\nu+d\xi.$$

Характеристическое уравнение распадается на два квадратных уравнения $\varepsilon\lambda^2+(d+\varepsilon/T_0)\lambda+c\cos x+d/T_0=0$ (при $\xi=0$), $(\varepsilon+x/(c\cos x))\lambda^2+(d+\varepsilon/T_0)\cdot\cdot(1-x/(c\cos x))\lambda-d/T_0-x-c(\cos x+x\sin x)=0$ (при $\xi\neq 0$). Обозначим λ_2, λ_3 — регулярные, λ_1, λ_4 — сингулярные корни этих уравнений ($\operatorname{Re}\lambda_1<0$, $\operatorname{Re}\lambda_4>0$). На регулярном участке управления синтезируемое управление определяется соотношениями

$$x_2+x_3=x^*,\ (\lambda_2+1-T_0)x_2+(\lambda_3+1/T_0)x_3=y^*,\ \bar{u}=c\cos x^*(\psi_2+\psi_3)=$$
$$=c\cos x^*\{\xi_2[y^*-(\lambda_3+1/T_0)x^*]+\xi_3[y^*-(\lambda_2+1/T_0)x^*]\}/(\lambda_2-\lambda_3)\,|x=x^*.$$

В левом пограничном слое будем иметь (здесь использована приближенная зависимость между регулярными составляющими состояния, полученную из второго уравнения исходной системы при $\varepsilon=0$)

$$x_1+x=x^*,\ (\lambda_1+1/T_0)x_1+\bar{y}=y^*,\ \bar{x}=x_2+x_3,\ \bar{y}=y_2+y_3,$$
$$c\cos\bar{x}[\bar{x}-\bar{u}(\bar{x},\bar{y})]=-d\bar{y},$$
$$u=c\cos x^*[\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_3)\,|x=x^*.$$

Эта нелинейная система может решаться численно в реальном масштабе времени. При ее решении может быть использовано также представление $\bar{y}$ через $\bar{x}$ по формуле Тейлора в окрестности невозмущенного движения. Аналогичные вычисления производятся для правого пограничного слоя.

Предложенный подход исследования сингулярно возмущенных систем имеет много общих черт с известными методами ВКБ [5], теории возмущений, линеаризации. Введенные модальные функции позволяют проводить достаточно полный качественный анализ движения динамической системы и хорошо приспособлены для процедуры синтеза управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белокопытов С. В., Дмитриев М. Г.* Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // АиТ. 1989. № 7.
2. *Соболев В. А.* Интегральные многообразия, сингулярные возмущения и оптимальное управление // УМЖ. 1987. Т. 39. № 1.
3. *Дончев А.* Системы оптимального управления. М.: Мир, 1987.
4. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сборник. 1952. Т. 31. Вып. 3.
5. *Моисеев Н. Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981.
6. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
7. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.
8. *Фоменко А. В.* Синтез оптимального управления с использованием параметрического поля и тейлоровских отображений // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 2.
9. *Фоменко А. В.* Приближенный синтез оптимального управления распределенными системами. Киев, 1989 (Препр./АН УССР. Ин-т кибернетики; 89–16).

Запорожье — Поступила в редакцию 7.XII.1989

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УДК 62-50

В. А. БОНДАРКО

СУБОПТИМАЛЬНОЕ И АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассматриваются непрерывные линейные динамические объекты с запаздыванием в управлении. Неизмеряемое возмущение ограниченно, кусочно-непрерывно и в остальном произвольно. Предлагаются регуляторы типа обратной связи от наблюдаемого выхода к управлению, минимизирующие максимальное отклонение выхода от желаемого значения после окончания переходных процессов. Параметры объекта управления могут быть неизвестными; в этом случае регулятор адаптируется к их значениям. Решение задачи достигается путем сведения исходных непрерывных объектов управления к дискретным.

Введение. Развитие и удешевление цифровой вычислительной техники делает возможным и желательным реализацию систем управления непрерывными объектами на базе элементов, функционирующих в дискретном времени. Часто при разработке таких систем постулируется некоторая дискретная модель объекта управления, и все дальнейшие построения проводятся в дискретных терминах. Иногда рассматривается непрерывный или даже распределенный [1] регулятор, который при реализации должен быть некоторым образом заменен аппроксимирующей его дискретной схемой (но последствия этой замены не исследуются). Наконец, может быть проведен и полный анализ системы, состоящей из непрерывного объекта, замкнутого дискретным регулятором.

Такой анализ особенно актуален при построении адаптивных систем. В самом деле, если задача решена для дискретных объектов с неизвестными параметрами, то условия работоспособности построенного регулятора — это описание классов допустимых объектов и возмущений. Предположим, для управления непрерывными объектами мы строим их дискретные модели и хотим затем применить «дискретный» результат. Сразу возникают следующие вопросы. Первый: как описать классы допустимых объектов и возмущений? Второй: как происходит функционирование системы в моменты, не кратные выбранному шагу (периоду) дискретизации по времени? Наконец, третий: если дискретный регулятор гарантировал высокое качество процессов для дискретных систем, то что можно сказать о качестве процессов непрерывных?

В настоящей работе сделана попытка ответить на эти вопросы по отношению к задаче оптимального и адаптивного субоптимального управления линейными объектами с запаздыванием в управлении в присутствии неизмеряемых ограниченных возмущений. Для дискретных объектов эта задача довольно давно и достаточно полно рассмотрена в работах [2—5]. В последнее время ряд авторов, в основном зарубежных [6], вновь возвращаются к этой теме. Для непрерывных объектов задача рассмотрена в [1] при отсутствии возмущений и без рассмотрения вопроса об оптимальности регулятора. Здесь обобщаются результаты работы [7], в которой возмущения учитываются, и гарантируется определенный уровень субоптимальности регулятора. Продвижение вперед

по сравнению с [7] заключается в том, что класс допустимых объектов удалось расширить.

1. Постановка задачи. Ниже будут рассматриваться как непрерывные, так и дискретные скалярные линейные объекты. Они описываются соответственно дифференциальными или разностными уравнениями

$$a(p)y(t)=b(p)u(t-T)+v(t), \tag{1.1}$$

$$\alpha(\nabla)y_k=\beta(\nabla)u_{k-l}+v_{k+n}. \tag{1.2}$$

В уравнении (2.1) $y(t)$, $u(t)$ и $v(t)$ — скалярные функции непрерывного времени t, $t\in[0, \infty)$, $T\geqslant 0$, $p=d/dt$ — оператор дифференцирования, $a(p)$ и $b(p)$ — многочлены степеней N и M соответственно, $N>M$. В уравнении (1.2) $\{y_k\}$, $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ — скалярные последовательности, $l\geqslant 0$, ∇ — оператор сдвига ($\nabla y_k=y_{k+1}$, $\nabla^2 y_k=y_{k+2}$ и т. д.), $\alpha(\nabla)$ и $\beta(\nabla)$ — многочлены степеней n и m соответственно, $n>m$. Старшие коэффициенты многочленов $a(\lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ равны единице, а $b(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ отличны от нуля. Содержательный смысл входящих в эти уравнения величин следующий: u — управление, v — неизмеряемое возмущающее воздействие, y — наблюдаемый выход, T и l — запаздывания. Функции $u(t)$ и $v(t)$ предполагаются кусочно-непрерывными, так что разрешимость уравнения (1.1) обеспечена. Соответствующие наборы начальных данных будем считать фиксированными произвольным образом; для всех последующих построений их значения безразличны.

В дальнейшем под регулятором всюду понимается некоторая обратная связь от наблюдаемого выхода к управлению, т. е. неупреждающее отображение множества функций $y(t)$ в множество функций $u(t)$ (для дискретных объектов — отображение множества последовательностей $\{y_k\}$ в множество последовательностей $\{u_k\}$).

Фиксируем желательное значение выхода y_*. Пусть объект управления замкнут каким-нибудь регулятором. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty}|y(t)-y_*|$ и $\lim\limits_{k\to\infty}|y_k-y_*|$ определяются возмущающим воздействием. Рассмотрим на множестве всех регуляторов функционалы

$$J_1=\sup_{v\in V_1}\overline{\lim_{t\to\infty}}|y(t)-y_*|,\qquad J_2=\sup_{v\in V_2}\overline{\lim_{k\to\infty}}|y_k-y_*|. \tag{1.3}$$

Здесь V_1 и V_2 — множества возможных возмущений

$$V_1=\{v(\cdot): |v(t)|\leqslant C_1\,\forall t\},\qquad V_2=\{(v_k)_{k=0}^{\infty}: |v_k|\leqslant C_2\,\forall k\}, \tag{1.4}$$

C_1 и C_2 — фиксированные константы. С тем же успехом может быть рассмотрено отклонение выхода от заданной траектории или от выхода эталонной модели. Ниже для простоты формулировок предполагается, что $y_*=\mathrm{const}$, однако результаты численных экспериментов приведены для более интересного случая, когда y_* зависит от времени.

Определим минимально возможные значения функционалов (1.3): $\bar{J}_1=\mathrm{In}\,fJ_1$ по всем непрерывным регуляторам и $\bar{J}_2=\mathrm{In}\,fJ_2$ по всем дискретным регуляторам. Будем называть регулятор стабилизирующим, если для ограниченных возмущений из соответствующего класса (1.4) замкнутая система обладает свойством диссипативности, т. е. любой ее процесс со временем входит в некоторый компакт в полном фазовом пространстве и более его не покидает. Следуя [8], стабилизирующий регулятор будем называть ε-субоптимальным, если для него $J_{1,2}\leqslant\bar{J}_{1,2}+\varepsilon$, где $\varepsilon\geqslant 0$. Эквивалентное определение [4] в данном случае неудобно по соображениям чисто редакционного характера.

Рассмотрим задачу построения адаптивного субоптимального регулятора. На содержательном уровне термин «адаптивный» означает, что параметры объекта управления частично или полностью неизвестны,

и регулятор должен обеспечить желательное значение функционала, приспосабливаясь (адаптируясь) к этим неизвестным параметрам. Строгое определение [4, 8] сводится по существу к требованию, чтобы адаптивный регулятор был субоптимальным для целого множества объектов управления; это множество называется классом адаптации. Полное определение включает в себя также точное описание сенсора, т. е. набора известных или измеряемых величин. В рассматриваемой здесь задаче сенсором будут служить значения наблюдаемого выхода, а также некоторая информация о неизвестных в целом параметрах объекта.

2. Формулировка результатов. Сформулируем сначала один уже известный [7] результат об управлении дискретными объектами, который затем будет перенесен на объекты непрерывные.

Итак, рассматривается объект (1.2) с возмущениями из класса (1.4). Пусть $m=n-1$ (это непринципиально) и все корни многочлена $\beta(\lambda)=\beta_1\lambda^{n-1}+\beta_2\lambda^{n-2}+\ldots+\beta_n$ лежат внутри единичного круга комплексной плоскости. Обозначим через Ξ множество всех таких объектов. В литературе они получили название минимально-фазовых, или устойчивых по управлению. Значения параметров объекта неизвестны. Известны лишь степени n и $m=n-1$ многочленов $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$, знак β_1 (для определенности примем $\beta_1>0$), запаздывание l, а также такие положительные величины Φ, ρ и B, что

$$\rho<1,\ \rho\Phi\geqslant\bar{J}_2,\ \beta_1<B. \tag{2.1}$$

Пусть

$$u_k=\varphi_k{}^*\tau_k, \tag{2.2}$$

где звездочкой обозначено транспонирование,

$$\varphi_k=(y_*,\ u_{k-1},\ u_{k-2},\ldots,u_{k-n-l+1},\ y_k,\ y_{k-1},\ldots,y_{k-n+1})^*, \tag{2.3}$$

а τ_k — $(2n+l)$-векторы подстраиваемых параметров. Эти векторы вместе со скалярными величинами ω_k последовательно определяются при $k\geqslant l$ с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{pmatrix}\tau_k\\ \omega_k\end{pmatrix}=\Omega(y_k-y_*,\rho,\Phi,\varphi_{k-l},\tau_{k-l},\tau_{k-1},\omega_{k-1},\omega_{k-1}). \tag{2.4}$$

Функция $\Omega(\cdot)$ определяется так

$$\Omega(\eta,\Phi,\varphi,\tau,\tau',\omega,\omega')=\begin{cases}\begin{pmatrix}\tau\\ \omega\end{pmatrix}, & \text{если } |\eta|\leqslant\Phi \\ & \text{если } \omega>\omega'+\Delta\omega,\\ \begin{pmatrix}\tau'+\Delta\tau\\ \omega'+\Delta\omega\end{pmatrix} & \text{если } |\eta|>\Phi \\ & \text{и } \omega\leqslant\omega'+\Delta\omega,\end{cases}$$

где $\Delta\tau=-2B^{-1}\eta(1-\rho\Phi|\eta|^{-1})|\varphi|^{-2}\varphi$, $\Delta\omega=(|\eta|-\rho\Phi)^2|\varphi|^{-2}$. При $j\in[0,l-1]$ вектор τ_j фиксирован произвольным образом, $\omega_j=0$.

Теорема 1 [7]. Регулятор (2.2)—(2.4) адаптивен в классе Ξ и $(\Phi-\bar{J}_2)$ субоптимален в смысле функционала (2.3).

Приведенный результат очень близок к более ранним [2] и отличается от них более сложной функцией $\Omega(\cdot)$ в уравнении (2.4). Это усложнение позволяет обойтись без некоторых дополнительных ограничительных условий, необходимых для работоспособности регуляторов [2]. Гарантируемый теоремой 1 уровень субоптимальности зависит от неизвестной величины $\bar{J}_2$, которая принимает различные значения для разных объектов (1.2) из класса Ξ. При этом для повышения качества управления требуется, чтобы величины ρ и Φ из неравенств (2.1) были как можно ближе к единице и $\bar{J}_2$ соответственно, что увеличивает ограничительность неравенств (3.1). В работе [5] описан аналогичный (2.2)—(2.4) адаптивный регулятор, субоптимальный с произвольным заранее фиксированным уровнем $\varepsilon>0$. Никакой априорной информации о зна-

чении $\bar{J}_2$ этот регулятор не требует. Результат [5] точно также может быть перенесен на случай непрерывных объектов управления, как это будет сделано ниже для теоремы 1. Более простой регулятор выбран только ради компактности изложения.

Попробуем применить теорему 1 для управления непрерывным объектом (1.1). Дополним регулятор (2.2)–(2.4) аналого-цифровым и цифро-аналоговым преобразователями

$$y_k=y(kd),\ u(kd+\varepsilon)=u_k,\ \varepsilon\in[0,\ d),\ k=0,\ 1,\ldots, \tag{2.5}$$

где d — постоянный шаг (период) дискретизации. Из (2.5) следует, что величины y_k и u_k удовлетворяют некоторому уравнению (1.2), коэффициенты которого определяются коэффициентами уравнения (1.1) и периодом дискретизации d. Рассмотрим вопрос о том, какие объекты (2.1) после такой дискретизации переходят в минимально-фазовые (устойчивые по управлению) дискретные объекты (1.2), т. е. в объекты из класса Ξ. Только на такие объекты может быть распространена теорема 1, поскольку для дискретных объектов не из класса Ξ регулятор (2.2)–(2.4) делает замкнутую систему неустойчивой. Чтобы сформулировать ответ, определим многочлены $\zeta_L(\lambda)=\zeta_{L,1}+\zeta_{L,2}\lambda+\ldots+\zeta_{L,L}\lambda^{L-1}$, положив

$$\zeta_{L,j}=(L+1)\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i\frac{(j-i)^L}{i!\,(L+1-i)!},\qquad j=1,2,\ldots,L,\qquad L=1,2,\ldots. \tag{2.6}$$

Обозначим через μ_i корни многочлена $b(\lambda)$ в правой части уравнения объекта (2.1): $b(\lambda)=b_L(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)\ldots(\lambda-\mu_M)$. Таким образом, **$L$ — разность степеней многочленов** $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ в уравнении (2.1). Будем считать, что $l=T/d$ — величина целая.

Теорема 2 [9] [1]. В результате дискретизации объекта (1.1) в силу (3.5) в правой части уравнения (1.2) возникает многочлен

$$\beta(\lambda)=d^Lb_L(d)\left\{\sum_{j=1}^{L}\zeta_{L,j}(d)\lambda^{j-1}\right\}\prod_{i=1}^{M}(\lambda-\exp(d\mu_i(d))), \tag{2.7}$$

где $b_L(d)\to b_L$, $\zeta_{L,j}(d)\to\zeta_{L,j}$, $\mu_i(d)\to\mu_i$ при $d\to0$.

Замечание [10]. Если для дискретизации вместо кусочно-постоянных управлений (3.5) используются кусочно-линейные или δ-образные, то формула (3.7) остается справедливой. Нужно только в ее правой части заменить в фигурной скобке L в первом случае на $L+1$, а во втором — на $L-1$.

Обсудим следствия формулы (2.7). Определим для объектов (1.1), (1.2) их степень неустойчивости по управлению (СНУ) — количество корней многочленов $b(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ вне левой полуплоскости и единичного круга соответственно. Пусть $b(\lambda)$ не имеет корней на мнимой оси. Элементарный анализ [10] показывает, что $\zeta_1(\lambda)\equiv1$, а при $L>1$ корни $\zeta_L(\lambda)$ располагаются следующим образом: $\zeta_{2K}(-1)=0$, $\zeta_{2K+1}(1-)\neq0$, отличных от -1 корней на единичной окружности нет, прочие корни относительно единичной окружности симметричны: если $\zeta_L(\lambda)=0$, то и $\zeta_L(1/\lambda)=0$. В силу (2.7) отсюда следует, что СНУ объекта (1.2) при всех достаточно малых d превосходит СНУ объекта (1.1) на целую часть величины $(L-1)/2$. Таким образом, устойчивыми по управлению объекты (1.2)

[1] Пользуясь случаем, хочу принести извинения авторам [9] в связи с тем, что принадлежащую им теорему я без ссылки опубликовал в [10]. Работа [9] не была тогда мне известна.

могут быть только в том случае, если $b(\lambda)$ — гурвицев многочлен степени не ниже $N-2$ (т. е. $L<3$). При $L=1$ СНУ объектов (1.1) и (1.2) очевидным образом совпадают, и неясным остается только случай $L=2$. Чтобы проанализировать его, определим величину $\Lambda=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_N-\mu_1-\mu_2-\ldots-\mu_{N-2}$, где λ_j и μ_i — корни многочленов $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ из уравнения (2.1): $a(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_N)$, $b(\lambda)=b_2(\lambda-\mu_1)(\lambda-\mu_2)\ldots(\lambda-\mu_{N-2})$. Обозначим через $K(d)$ СНУ объекта (2.2), полученного при дискретизации объекта (1.1) с периодом d.

Теорема 3. Пусть $L=2$ и многочлен $b(\lambda)$ гурвицев. Пусть шаг дискретизации d достаточно мал. Тогда $K(d)=0$ при $\Lambda<0$ и $K(d)=1$ при $\Lambda>0$.

Обозначим через Θ множество таких объектов (1.1), что многочлен $b(\lambda)$ гурвицев и либо $L=1$, либо $L=2$ и $\Lambda>0$. Из теорем 2 и 3 следует, что для любого объекта из Θ при дискретизации с достаточно малым периодом d получается объект (1.2) из класса Ξ, т. е. устойчивый по управлению. Если же исходный объект не принадлежит Θ, то при достаточно малых d объект (1.2) может принадлежать Ξ только в том случае, если $\Lambda=0$ или $b(\lambda)$ имеет корень на мнимой оси. Последние два условия выделяют множество меры нуль в пространстве коэффициентов (1.1). С точностью до этого множества Θ — это класс всех объектов, которые переходят в минимально-фазовые при дискретизации с достаточно малым периодом. При отсутствии запаздывания Θ совпадает с классом «мееровских» [11] объектов, стабилизируемых любой достаточно сильной обратной связью $u(t)=-\operatorname{sign}(b_L)\Gamma y(t)$. Точнее, для объектов (1.1) из Γ при всех достаточно больших Γ корни характеристического многочлена замкнутой системы $a(\lambda)+\Gamma|b_L|b(\lambda)$ лежат левее мнимой оси и отделены от нее равномерно по Γ.

Рассмотрим теперь вопрос о возмущениях. Легко видеть, что при дискретизации объекта (2.1) в правой части (2.2) получаем величины

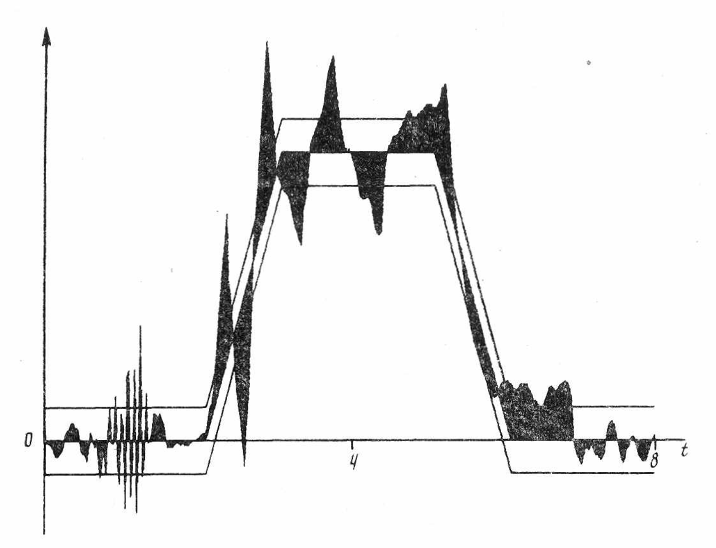
$$v_k=\int_0^d\int_0^d\ldots\int_0^d \exp\left(\sum_{i=1}^N s_i\lambda_i\right)v\left(kd-\sum_{i=1}^N s_i\right)ds_1\,ds_2\ldots ds_N. \qquad (2.8)$$

Пусть в уравнении (1.1) $v(\cdot)\in V_1$. Тогда, разумеется, определяемая равенством (2.8) последовательность $\{v_k\}$ принадлежит V_2 при некотором C_2. Формула (2.8) не может, однако, задавать отображение класса V_1 на класс V_2: не для всякого элемента V_2 существует его прообраз из V_1. Так, например, не могут одновременно иметь место оба равенства: $v_k=C_2$, $v_{k+1}=-C_2$. Поэтому для управления непрерывными объектами теорема 1 неприменима, даже если нас не интересуют значения выхода в некратные d моменты. Тем не менее регулятор (2.2)—(2.4) остается [7] адаптивным в некотором подклассе Θ и даже субоптимальным в смысле «непрерывного» функционала J_1.

Обозначим через Θ^1 множество тех объектов из класса Θ, у которых степень многочлена $b(\lambda)$ равна $N-1$. Будем считать известными запаздывание T и такие положительные величины Φ и ρ, что $\rho<1$, $\rho\Phi>\bar{J}_1$. Известным (для определенности положительным) будем считать знак b_1, т. е. старшего коэффициента полинома $b(\lambda)$, а также $\bar{b}$ — оценку b_1 сверху $b_1<\bar{b}$.

Теорема 4. При $B=d\bar{b}$ регулятор (2.2)—(2.5) адаптивен и $(\Phi-\bar{J}_1+\mathcal{O}(d))$ субоптимален в классе Θ^1 в смысле функционала J_1.

Обозначим через Θ_r множество объектов из классса Θ, у которых корни многочлена $a(\lambda)$ в уравнении (1.1) не превосходят r по абсолютной величине. Чтобы включить в класс адаптации объекты с немаксимальной степенью $b(\lambda)$, дополним уравнение (2.4). Возьмем $\Phi'>0$ и определим векторы τ_k'



$$\left.\begin{array}{l}\tau_k'=\tau_k-\dfrac{1-\rho}{\bar b\,|\varphi_{k-l}-\varphi_{k-l-1}|^2}(y_k-y_{k-1})(\varphi_{k-l}-\varphi_{k-l-1}),\\ \text{если}\quad |y_k-y_{k-1}|>\Phi' \quad \text{и} \quad \tau_k'=\tau_{k-1}=\ldots=\tau_{k-l-1},\\ \tau_k'=\tau_k,\quad \text{если}\quad |y_k-y_{k-1}|\leqslant\Phi' \quad \text{или} \quad \tau_k'\neq\tau_{k-j},\\ j\in[1,l+1].\end{array}\right\} \qquad (2.9)$$

Вновь обозначим $\tau_k=\tau_k'$ и положим $B=d\bar b$.

Теорема 5. Для любого $r>0$ регулятор (2.2)–(2.5), (2.9) адаптивен и $(\Phi-\bar J_1+\mathcal{O}(d))$ субоптимален в классе Θ_r в смысле функционала J_1, если значение Φ' достаточно велико.

Замечание. Пусть кроме перечисленных выше величин известны еще две $-r$ и $\bar C_1$, где $\bar C_1\geqslant C_1$, C_1 – величина, определяющая класс возможных возмущений (2.4). Тогда в теореме 5 можно явно указать допустимое значение Φ', положив

$$\Phi'=2\{\Phi+[(1+Nd)^N-1]\exp(2rT)\bar C_1/N!\}.$$

3. Результаты численного моделирования. Рассмотрим объект управления (2.1) при $a(p)=p^2-10p$, $b(p)=p+10$, $T=1/10$. Компоненты вектора τ_0 рассчитаем как коэффициенты $\mathcal{O}(d)$ – субоптимального неадаптивного регулятора [7], но не для истинных параметров объекта, а для $a(p)=p^2-8p$, $b(p)=0.9p+7.2$. При выбранных параметрах $\bar J_1\approx 0.0116$. Поэтому $\Phi=0{,}02$ и $\rho=0{,}7$ удовлетворяют условиям теоремы 4. Положим $\bar b=1.25$, $C_1=1$, $d=0.025$.

Результаты численного моделирования системы (1.1), (2.2)–(2.5) с описанными параметрами приведены на рисунке. Черным цветом закрашена область между графиками $y(t)$ и $y_*(t)$, где $y_*(t)$ – желаемое значение выхода. Ломаные линии – графики функций $y_*(t)\pm\bar J_1$. Только оптимальный регулятор способен при всех возможных возмущениях удерживать выход объекта между этими линиями, и сузить эту полосу невозможно. Отклонение выхода объекта от этой полосы характеризует качество адаптивного регулятора. В данном эксперименте при $t\in[7]$ график $y(t)$ из этой полосы не выходит.

4. Обоснование результатов. В доказательстве нуждаются теоремы 3 и 5. Теорема 5 доказана в [7] для множества Θ^1 вместо Θ_r. Чтобы дополнить ее доказательство, достаточно использовать теорему 3 вместо теоремы 2. Ограничимся поэтому доказательством теоремы 3.

Перепишем в векторно-матричной форме уравнение (1.1) при $v(t)\equiv 0$

$$dx(t)/dt=Ax(t)+Bu(t),\ \ y(t)=C^*x(t). \qquad (4.1)$$

Здесь $x(t)$ — N-мерный фазовый вектор, а $\{A, B, C\}$ — произвольная тройка матриц размерности $N\times N$, $N\times 1$ и $N\times 1$ соответственно, удовлетворяющих следующим условиям: пара (A, C) вполне наблюдаемая, $\det(\lambda I-A)=a(\lambda)$, $a(\lambda)C^*(\lambda I-A)^{-1}B=b(\lambda)$, где λ — произвольное комплексное число, I — единичная $N\times N$-матрица. Обозначив $x_k=x(kd)$, из (3.5), (5.1) получаем, что при всех k справедливы равенства

$$x_{k+1}=\exp(dA)x_k+A^{-1}[\exp(dA)-I]Bu_{k-l},\ y_k=C^*x_k.$$

Это уравнение — векторно-матричная форма записи уравнения (1.2). Следовательно, $\beta(\lambda)/\alpha(\lambda)=C^*[\lambda I-\exp(dA)]^{-1}A^{-1}[\exp(dA)-I]B$. В условиях теоремы $C^*B=0$, $C^*AB=b_2$, $C^*A^2B=b_2\Lambda$. Поэтому $\beta(0)/\alpha(0)=$ $=C^*A^{-1}[\exp(-dA)-I]B=-dC^*B+(d^2/2)C^*AB+\mathcal{O}(d^3)=(d^2/2)b_2+\mathcal{O}(d^3)$, $\beta(-1)/\alpha(-1)=C^*A^{-1}[I+\exp(dA)]^{-1}[I-\exp(dA)]B=-(d/2)C^*B+(d^3/24)\times$ $\times C^*A^2B+\mathcal{O}(d^5)=(d^3/24)b_2\Lambda+\mathcal{O}(d^5)$.

Пусть d достаточно мало. Тогда знаки $\beta(-1)/\alpha(-1)$ и $\beta(0)/\alpha(0)$ совпадают при $\Lambda>0$ и противоположны при $\Lambda<0$. Следовательно, $\beta(\lambda)$ имеет корень на интервале $(-1,0)$ при $\Lambda<0$. Если же $\Lambda>0$, то $\beta(\lambda)$ имеет корень на полуоси $(-\infty-1)$, поскольку знак $\beta(-1)/\alpha(-1)$ совпадает со знаком b_2, а знак $\beta(-s)/\alpha(-s)$ противоположен знаку b_2 при всех достаточно больших s в силу (3.7). Все остальные корни по теореме 2 имеют вид $\exp(\mu_i(d))$, где $\mu_i(d)\to\mu_i$ при $d\to 0$, $\operatorname{Re}\mu_i<0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ichikawa K.* Adaptive control of delay system // Int. J. Control. 1986. V. 43. № 6.
2. *Якубович В. А.* Адаптивное субоптимальное управление линейным динамическим объектом при наличии западывания в управлениях // Кибернетика. 1976. № 1.
3. *Бондарко В. А., Якубович В. А.* Квадратичный критерий диссипативности дискретных систем и его применение к задачам адаптивного управления // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы управления. М.: Научный совет по кибернетике, 1979.
4. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
5. *Бондарко В. А.* Адаптивное субоптимальное управление решениями линейных разностных уравнений // ДАН СССР. 1983. Т. 270. № 2.
6. *Chu Y. T., Wu W.-T.* Bounded disturbance adaptive control with exponential and selective data weightings // Int. J. Control. 1987. V. 45. № 4.
7. *Бондарко В. А.* Синтез адаптивного субоптимального управления непрерывным линейным динамическим объектом, выход которого измеряется с запаздыванием – Деп. в ВИНИТИ 21.08.1981. № 3377-81.
8. *Срагович В. Г.* Адаптивное управление. М.: Наука, 1981.
9. *Aström K. J., Hagander P., Sternby J.* Zeros of sampled systems // Proc. 19th IEEE Conf. on Decision and Control. Albuquerque, 1980.
10. *Bondarko V. A.* Discretization of continious linear dynamic systems. Analysis of the methods // System & Control Letters. 1984. № 5.
11. *Мееров М. В.* Синтез структур систем управления высокой точности. М.: Наука, 1967.

Ленинград

Поступила в редакцию
16.III.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УДК 517.5

В. Т. БИТЮЦКИХ

МАКСИМИННАЯ ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДСТВ НАПАДЕНИЯ И ОБОРОНЫ (II)

Рассмотрена максиминная задача распределения средств нападения и обороны по совокупности объектов при аддитивной функции эффективности. С помощью выпуклых аппроксимаций функций эффективности построена приближенно эквивалентная максиминная задача. Для этой задачи установлены условия оптимальности стратегий нападения и обороны, приводящие к простым алгоритмам построения этих стратегий. Рассмотрен пример решения типовой максиминной задачи.

Введение. Рассматривается обобщение известной в литературе [1, 2] максиминной задачи распределения средств нападения и обороны по совокупности объектов. Для решения задачи используется подход, примененный автором ранее в работе [3]: с помощью выпуклых аппроксимаций функций эффективности формируется приближенно эквивалентная максиминная задача, для которой удается установить простые и удобные для практики условия оптимальности стратегий нападения и обороны. Приведен пример решения максиминной задачи.

1. Постановка задачи. Рассматриваются две стороны — А и В. Сторона А имеет X средств нападения, а сторона В – Y средств обороны. Эти средства распределяются по n объектам в соответствии с векторами $x=\{x_j\}$, $y=\{y_j\}$, $j=\overline{1, n}$. Каждое средство обороны может поразить одно средство нападения, атакующее j-й объект, с вероятностью $\alpha_j>0$. Эффект от распределения средств сторон на j-м объекте определяется функцией $f_j(x_j, y_j)$, а на всей совокупности объектов – функцией

$$F(x, y)=\sum f_j(x_j, y_j).$$

Целью стороны А является максимизация, а целью стороны В – минимизация $F(x, y)$. Пусть сторона А должна первой распределить свои средства, выбрав некоторый вектор x, который остается неизменным в процессе всей операции. Этот вектор станет известен стороне В перед распределением ею своих средств. В этом случае требуется определить векторы x^0, y^0, реализующие

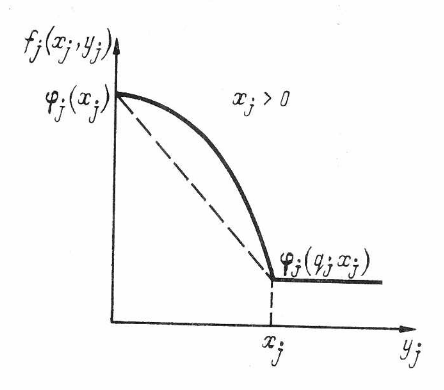
$$\max_x \min_y F(x, y) \tag{1.1}$$

при условиях

$$\sum x_j=X, \qquad \sum y_j=Y, \qquad x_j,\ y_j\geqslant 0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим следующую наиболее типичную схему определения функций $f_j(x_j, y_j)$ (схема 1 в работе [3]). Пусть каждое из X средств нападения обстреливается не более чем одним средством обороны. Если $X>Y$, то $X-Y$ средств нападения не обстреливаются, а если $X<Y$, то $Y-X$ средств обороны остаются в запасе. Тогда

$$f_j(x_j, y_j)=\sum_{i=0}^{z_j} C_{z_j}^i \alpha_j^i \beta_j^{z-i} \varphi_j(x_j-i), \tag{1.3}$$



где

$$z_j=\min(x_j, y_j), \quad \beta_j=1-\alpha_j, \quad \varphi_j(x_j)=f_j(x_j, 0) \quad \varphi_j(0)=0.$$

На практике $\varphi_j(x_j)$ — обычно строго вогнутые возрастающие ограниченные сверху функции. В этом случае $f_j(x_j, y_j)$ обладают следующими свойствами (рисунок):

1) $f_j(x_j, y_j)$ вогнуты и убывают по y_j в области $0 \leqslant y_j \leqslant x_j$ и не зависят от y_j в области $y_j \geqslant x_j$;

2) $f_j(x_j, y_j)$ при $x_j \geqslant y_j$ точно или приближенно представимы в виде

$$f_j(x_j, y_j)=\varphi_j(q_j x_j)=\varphi_j((1-p_j)x_j), \tag{1.4}$$

где $0 \leqslant q_j < 1$, $p_j=1-q_j$. Первое свойство нетрудно установить, анализируя выражение для $f_j(x_j, y_j)$. Второе свойство обсуждено в [3].

В дальнейшем будем пренебрегать условиями целочисленности, а функции $\varphi_j(x_j)$ считать дифференцируемыми в допустимой области.

2. Решение задачи. Для принятой схемы определения функций $f_j(x_j, y_j)$ достаточно рассмотреть решение задачи при $X \geqslant Y$. Введем функции

$$\omega_j(x_j)=\begin{cases} \dfrac{f_j(x_j, 0)-f_j(x_j, y_j=x_j)}{x_j}=\dfrac{\varphi_j(x_j)-\varphi_j(q_j x_j)}{x_j} & \text{при} \quad x_j>0, \\ p_j \varphi_j'(0) & \text{при} \quad x_j=0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Нетрудно видеть, что $\omega_j(x_j)$ непрерывны и монотонно убывают по x_j.

Построим для каждой функции $f_j(x_j, y_j)$ выпуклую по y_j аппроксимацию:

$$h_j(x_j, y_j)=\begin{cases} f_j(x_j, 0)-\omega_j(x_j) y_j=\varphi_j(x_j)-\omega_j(x_j) y_j & \text{при} \quad y_j \leqslant x_j, \\ f_j(x_j, y_j)=\varphi_j(q_j x_j) & \text{при} \quad y_j \geqslant x_j. \end{cases} \tag{2.2}$$

Функции $h_j(x_j, y_j)$ на отрезке $0 \leqslant y_j \leqslant x_j$ линейно убывают по y_j, а справа от $y_j=x_j$ постоянны по y_j.

Рассмотрим задачу о минимуме по y при условии (1.2) функции

$$H(x, y)=\sum h_j(x_j, y_j).$$

Очевидно, что вектор y^* является решением этой задачи в том и только в том случае, если

$$\begin{aligned} y_j^* &= x_j \quad \text{при} \quad \omega_j(x_j)>\lambda, \\ y_j^* &\leqslant x_j \quad \text{при} \quad \omega_j(x_j)=\lambda, \\ y_j^* &= 0 \quad \text{при} \quad \omega_j(x_j)<\lambda, \quad \lambda>0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

При $\omega_j(x_j) \neq \lambda$, $j=\overline{1, n}$, решение задачи о минимуме по y функции $H(x, y)$ единственно, причем $h_j(x_j, y_j^*)=f_j(x_j, y_j^*)$. Если же $\omega_j=\lambda$ для некоторого множества номеров J и $0<Y-\sum\limits_{j \notin J} y_j^* < \sum\limits_{j \in J} x_j$, то существует множество

решений y^*, различающихся значениями компонент y_j^*, $j \in J$. В этом случае будем рассматривать подмножество $\overline{\mathbf{Y}}_{\text{opt}}$ решений, такое что для всех $j \in J$ либо $y_j^* = x_j$, либо $y_j^* = 0$, за исключением не более чем одного номера $j = r$, для которого может быть $0 < y_r^* < x_r$. Тогда значения функций h_j и f_j не совпадают только для этого номера r.

Пусть теперь $y^* \in \overline{\mathbf{Y}}_{\text{opt}}$, тогда

$$H(x, y^*) = F(x, y^0) - \theta(x), \tag{2.4}$$

где y^0 — решение задачи о минимуме $F(x, y)$ по y, а $\theta(x) = 0$, если номер r отсутствует, и $\theta(x) \leqslant f_r(x_r, y_r^*) - h_r(x_r, y_r^*)$ — в противном случае.

Согласно (2.4), с погрешностью не более $\theta(x)$ $\min\limits_y F(x, y)$ в (1.1) может быть заменен на $\min\limits_y H(x, y)$. Как отмечено в [3], в практических задачах количество объектов n и количество средств нападения X и обороны Y обычно велико и тогда θ не превышает, как правило, 1—2% от величины $F(x, y^0)$. Кроме того, положив $y_r^* = x_r$ или $y_r^* = 0$, можно получить точное решение задачи о минимуме $F(x, y)$ для несколько большего или меньшего, чем заданное, значения Y.

Таким образом, для задачи (1.1), (1.2) можно сформулировать следующую точно или приближенно эквивалентную задачу: требуется определить векторы x^*, y^*, реализующие при условиях (1.2)

$$\max_x \min_y H(x, y). \tag{2.5}$$

При фиксированном x оптимальный вектор y^* легко определяется из условий (2.3). Для оптимальной стратегии x^* имеет место следующее утверждение.

Теорема. Для того чтобы вектор x^* был оптимальной стратегией нападения в максиминной задаче (2.5), необходимо выполнение условий:

$a)$ $q_j\varphi_j'(q_jx_j^*) = \mu - \lambda$, $x_j^* > 0$,
$\leqslant \mu - \lambda$, $x_j^* = 0$, $j \in J_A = \{j\colon \omega_j(0) > \lambda,\ \mu > b_j(\lambda)\}$;

$в)$ $\omega_j(x_j^*) = \lambda$, $j \in J_B = \{j\colon \omega_j(0) > \lambda,\ a_j(\lambda) \leqslant \mu \leqslant b_j(\lambda)\}$;

$c)$ $\varphi_j'(x_j^*) = \mu$, $x_j^* > 0$,
$\leqslant \mu$, $x_j^* = 0$, $j \in J_C = \{j\colon \omega_j(0) \leqslant \lambda$ или $\mu < a_j(\lambda)\}$;

$$d)\quad Y_B^* = \sum_{j \in J_B} \frac{\mu - a_j(\lambda)}{b_j(\lambda) - a_j(\lambda)} x_j^*,$$

где $\mu > 0$, λ — величина, определяемая условиями (2.3), $Y_B^* = \sum\limits_{j \in J_B} y_j^*$, $a_j(\lambda) = \varphi_j'(x_j(\lambda))$, $b_j(\lambda) = \lambda + q_j\varphi_j'(q_jx_j(\lambda))$, а $x_j(\lambda)$ определяются из уравнений $\omega_j(x_j(\lambda)) = \lambda$.

Доказательство. Пусть x^*, y^* — решение задачи. Тогда справедливо (2.3) и для любого допустимого направления γ

$$D_\gamma H^*(x^*) \leqslant 0, \tag{2.6}$$

где $H^*(x) = H(x, y^*(x))$, $y^*(x) \in \mathbf{Y}_{\text{opt}}(x)$, $\mathbf{Y}_{\text{opt}}(x)$ — множество допустимых векторов y, минимизирующих $H(x, y)$ при данном x, а D_γ — знак производной по направлению $\gamma = \{\gamma_j\}$, $j = \overline{1, n}$. Допустимо направление, для которого $\sum \gamma_j = 0$, $\gamma_j \geqslant 0$, для всех j: $x_j = 0$. Для вычисления производной будем пользоваться ее определением:

$$D_\gamma H^*(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{H(x^\gamma, y^\gamma) - H(x, y^*)}{\varepsilon}, \tag{2.7}$$

где $x^\gamma = x + \gamma\varepsilon$, $y^\gamma \in \mathbf{Y}_{\text{opt}}(x^\gamma)$, $y^* \in \mathbf{Y}_{\text{opt}}(x)$.

Введем множества

$$J_1=\{j\colon x_j^*>0,\ \omega_j(x_j^*)>\lambda\},\quad J_2=\{j\colon x_j^*>0,\ \omega_j(x^*)=\lambda\},$$
$$J_3=\{j\colon x_j^*>0,\ \omega_j(x_j^*)<\lambda\},\quad J_4=\{j\colon x_j^*=0\}.$$

Пусть все эти множества не пусты.

Согласно (2.3), $y_j^*=0$ для всех $j\in J_3$, тогда по теореме Куна – Таккера

$$\varphi_j'(x_j^*)=\mu,\quad j\in J_3,\quad \mu>0. \tag{2.8}$$

Определим $D_\gamma H^*(x^*)$ по направлению $\gamma_s=1$, $\gamma_t=-1$, s, $t\in J_1$. Для этого направления $x_s^\gamma=x_s^*+\varepsilon$, $x_t^\gamma=x_t^*-\varepsilon$, $x_j^\gamma=x_j^*$, $j\neq s$, t. Так как $\omega_j(x_j)$ – непрерывные монотонно убывающие функции, то при малом ε $\omega_j(x_j^\gamma)>\lambda$, $j\in J_1$. Тогда в соответствии с (2.3) $y_s^\gamma=x_s^*+\varepsilon$, $y_t^\gamma=x_t^*-\varepsilon$, $y_j^\gamma=y_j^*$, $j\neq s$, t. По формуле (2.7), учитывая (2.2) и (2.6), получим

$$D_\gamma H^*(x^*)=q_s\varphi_s'(q_sx_s^*)-q_t\varphi_t'(q_tx_t^*)\leqslant 0.$$

Взяв производную по противоположному направлению, получим обратное неравенство. Таким образом,

$$q_j\varphi_j'(q_jx_j^*)=\mu_1,\quad j\in J_1,\quad \mu_1\geqslant 0. \tag{2.9}$$

Рассмотрим далее допустимое направление $\gamma_t=-1$, $t\in J_3$; $\gamma_j=\bar\gamma_j(\varepsilon)>0$ для всех $j\in J_2$; $\gamma_j=0$, $j\notin J_2$, $j\neq t$, где $\bar\gamma_j(\varepsilon)$ выбраны так, чтобы при любом ε величины $\omega_j(x_j^\gamma)$ для всех $j\in J_2$ оставались равными между собой (это возможно, так как $\omega_j(x_j)$ – непрерывные монотонно убывающие функции). Легко установить, что

$$\bar\gamma_j(0)=1/[\omega_j'(x_j^*)S],\qquad S=\sum_{j\in J_2}\frac{1}{\omega_j'(x_j^*)}.$$

Вектор x^γ имеет вид: $x_t^\gamma=x_t^*-\varepsilon$; $x_j^\gamma=x_j^*+\bar\gamma_j(\varepsilon)\varepsilon$, $j\in J_2$; $x_j^\gamma=x_j^*$, $j\notin J_2$, $j\neq t$. Вектор y^γ при малом ε в соответствии с (2.3) имеет вид: $y_t^\gamma=0$; $0\leqslant y_j^\gamma\leqslant x_j^\gamma$, $j\in J_2$; $y_j^\gamma=y_j^*$, $j\notin J_2$, $j\neq t$. Кроме того, $\sum\limits_{j\in J_2}y_j^*=\sum\limits_{j\in J_2}y_j^\gamma$. Воспользовавшись теперь формулой (2.7), получим

$$D_\gamma H^*(x^*)=-\mu+\frac{1}{S}\sum_{j\in J_2}\left[\frac{\varphi_j'(x_j^*)}{\varphi_j'(x_j^*)}-y_j^*\right]\leqslant 0.$$

Обозначив второй член через $\Phi(\lambda)$, имеем $\Phi(\lambda)\leqslant\mu$. Рассмотрев противоположное направление, получим $\Phi(\lambda)\geqslant\mu$, т. е. $\Phi(\lambda)=\mu$. Отсюда следует, что

$$\sum_{j\in J_2}y_j^*=\sum_{j\in J_2}\frac{\mu-\varphi_j'(x_j^*)}{-\omega_j'(x_j^*)}. \tag{2.10}$$

Рассмотрев далее направление $\gamma_t=-1$, $t\in J_1$; $\gamma_j=\bar\gamma_j(\varepsilon)$ для всех $j\in J_2$ и противоположное ему направление, аналогично предыдущему случаю получим

$$\mu_1=\mu-\lambda. \tag{2.11}$$

Разделим множество J_4 на два подмножества: $J_4^1=\{j\colon j\in J_4,\ \omega_j(0)\leqslant\lambda\}$, $J_4^2=J_4\setminus J_4^1$. Для направления $\gamma_t=-1$, $t\in J_3$; $\gamma_s=1$, $s\in J_4^1$, имеем $D_\gamma H^*(x^*)=$ $=-\mu+\varphi_s'(0)$, т. е.

$$\varphi_j'(0)\leqslant\mu,\quad j\in J_4^1. \tag{2.12}$$

Аналогично

$$\mu\geqslant\lambda+q_j\varphi_j'(0),\quad j\in J_4^2. \tag{2.13}$$

Таким образом, для оптимальности x^* необходимо выполнение (2.10) и условий, объединяющих (2.9), (2.11), (2.13) и (2.8), (2.12):

$$\omega_j(x_j^*)>\lambda,\ \lambda+q_j\varphi_j'(q_jx_j^*)=\mu,\quad x_j^*>0, \qquad \leqslant\mu,\quad x_j^*=0; \tag{2.14}$$

$$\omega_j(x_j^*)<\lambda,\ \varphi_j'(x_j^*)=\mu,\quad x_j^*>0, \qquad \leqslant\mu,\quad x_j^*=0; \tag{2.15}$$

$$\omega_j(x_j^*)=\lambda,\ \text{если не выполняются (2.14) и (2.15).} \tag{2.16}$$

Рассмотрим соотношения (2.15). Так как $\varphi_j'(x_j)$ и $\omega_j(x_j)$ — монотонно убывающие функции, то (2.15) эквивалентно условиям *c*) теоремы. Аналогично для условий (2.14) и *a*), а следовательно, (2.16) и *в*). Наконец, поскольку

$$\omega_j'(x_j^*)=-[b_j(\lambda)-a_j(\lambda)]/x_j^*,\quad j\in J_2,$$

то (2.10) эквивалентно условию *d*) теоремы.

Если некоторые из множеств J_k, $k=\overline{1,4}$, пусты, то те из условий *a*)—*d*) теоремы, которые относятся к непустым множествам, устанавливаются аналогично.

Теорема доказана.

Условия теоремы для любой пары значений λ, μ определяют вектор $x(\lambda,\mu)$, а в совокупности с (2.3) — вектор (возможно, не единственный) $y(\lambda,\mu)$. Обозначим $X(\lambda,\mu)=\sum x_j(\lambda,\mu)$, $Y(\lambda,\mu)=\sum y_j(\lambda,\mu)$. Для решения задачи необходимо найти все значения λ, μ, при которых $X(\lambda,\mu)=X$, $Y(\lambda,\mu)=Y$, и выбрать из них пару λ^*, μ^*, доставляющую максимум функции $H(x(\lambda,\mu), y(\lambda,\mu))$. (Заметим, что, согласно (1.3), при $X<Y$ достаточно решить задачу для $X=Y$; при этом следует воспользоваться условиями *a*) теоремы, которые в данном случае не только необходимы, но и достаточны для оптимальности x^*.) Поскольку $\varphi_j'(x_j)$ и $\omega_j(x_j)$ — непрерывные монотонно убывающие функции, то при возрастании μ величина $X(\lambda,\mu)$ изменяется непрерывно (при $q_j>0$) от неограниченно больших значений (при $\mu\to0$) до нуля. Следовательно, для любого X существует кривая $\lambda(\mu)$, вдоль которой $X(\lambda(\mu),\mu)=X$. Для отыскания λ^*, μ^* можно осуществить движение по этой кривой, фиксируя пары λ, μ, при которых $Y(\lambda,\mu)=Y$.

Рассмотрим важный для практики частный случай.

Пусть $p_j=1$ (т. е. $q_j=0$) и $X<Y$. Тогда допустимый вектор x^* является оптимальной стратегией нападения в задаче (2.5) в том и только в том случае, если выполняются условия *в*), *c*), *d*) теоремы.

Необходимость этого утверждения очевидна, так как если $X<Y$ и $q_j=0$, то $J_A=\varnothing$. Достаточность следует из того, что при $J_A=\varnothing$ $X(\lambda,\mu)$ убывает по λ и μ, а $Y(\lambda,\mu)$ убывает по λ и возрастает по μ, а следовательно, существует единственная пара λ^*, μ^* для которой $X(\lambda^*,\mu^*)=X$, $Y(\lambda^*,\mu^*)=Y$.

3. Пример решения максиминной задачи. На практике функции $\varphi_j(x_j)$ обычно выражаются (хотя бы приближенно) в виде $\varphi_j(x_j)=c_j(1-e^{-k_jx_j})$. В этом случае, как показано в [3], $p_j=1+\ln(\alpha_j+\beta_je^{-k_j})/k_j$.

В соответствии с (2.1) $\omega_j(0)=k_jc_jp_j$. Для всех j: $k_jc_jp_j>\lambda$ определим величины $x_j(\lambda)$ из уравнений $\omega_j(x_j(\lambda))=\lambda$, которые в данном случае имеют вид

$$\frac{c_j}{x}(e^{-k_jq_jx_j}-e^{-k_jx_j})=\lambda.$$

Вычислим далее для всех j: $k_jc_jp_j>\lambda$ величины $a_j(\lambda)=k_jc_je^{-k_jx_j(\lambda)}$; $b_j(\lambda)=\lambda+k_jc_jq_je^{-k_jq_jx_j(\lambda)}$.

Зададим некоторые значения λ, μ и определим вектор $x(\lambda, \mu)$, удовлетворяющий условиям a), $в$), c) теоремы, и вектор $y(\lambda, \mu)$, удовлетворяющий (2.3) и условию d) теоремы (предполагая, что $X \geqslant Y$).

Для $j \in J_A = \{j: k_j c_j p_j > \lambda,\ \mu \geqslant b_j(\lambda)\}$

$$x_j(\lambda, \mu) = \begin{cases} -\dfrac{1}{k_j q_j} \ln \dfrac{\mu - \lambda}{k_j c_j q_j} & \text{при} \quad k_j c_j q_j \geqslant \mu - \lambda, \\ 0 & \text{при} \quad k_j c_j q_j \leqslant \mu - \lambda. \end{cases}$$

$$y_j(\lambda, \mu) = x_j(\lambda, \mu).$$

Для $j \in J_B = \{j: k_j c_j p_j > \lambda,\ a_j(\lambda) \leqslant \mu \leqslant b_j(\lambda)\}$ $x_j(\lambda, \mu) = x_j(\lambda)$, величина $Y_B{}^*$ определяется из условия d) теоремы, а компоненты $y_j(\lambda, \mu)$ – произвольные величины, удовлетворяющие условиям $0 \leqslant y_j \leqslant x_j(\lambda, \mu)$ и $\sum\limits_{j \in J_B} y_j = Y_B{}^*$.

Для того чтобы $y(\lambda, \mu) \in \overline{\mathbf{Y}}_{\text{opt}}$, следует положить $y_j(\lambda, \mu)$ равными 0 или x_j, за исключением не более чем одного номера r, для которого может быть $0 < y_r(\lambda, \mu) < x_r(\lambda, \mu)$.

Для $j \in J_C = \{j: k_j c_j p_j \leqslant \lambda$ или $\mu \leqslant a_j(\lambda)\}$

$$x_j(\lambda, \mu) = \begin{cases} -\dfrac{1}{k_j} \ln \dfrac{\mu}{k_j c_j} & \text{при} \quad k_j c_j \geqslant \mu, \\ 0 & \text{при} \quad k_j c_j \leqslant \mu, \end{cases}$$

$$y_j(\lambda, \mu) = 0.$$

Решение задачи дает пара λ^*, μ^*, при которой $X(\lambda^*, \mu^*) = X$, $Y(\lambda^*, \mu^*) = Y$, а значение функции $H(x(\lambda^*, \mu^*), y(\lambda^*, \mu^*))$ максимально.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данскин Дж.* Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружений. М.: Сов. радис, 1970.
2. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.
3. *Битюцких В. Т.* Минимаксная задача распределения средств нападения и обороны // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 4.

Москва

Поступила в редакцию
16.II.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УДК 519.856.2

А. И. КИБЗУН, В. Ю. КУРБАКОВСКИЙ

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ КВАНТИЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассматривается задача о минимизации площади взлетно-посадочной полосы (ВПП) при заданном ограничении на вероятность успешной посадки. В статье предлагаются новые подходы к решению задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями.

Введение. В предлагаемой статье рассматривается нетрадиционный класс задач стохастического программирования, оптимизируемым критерием в которых является квантиль распределения функции случайного аргумента. Работ, в которых до настоящего времени такие задачи рассматривались, сравнительно немного, и посвящены они в основном исследованию качественных свойств функции квантили (таких, как непрерывность, выпуклость). В настоящей статье предлагаются два алгоритма типа стохастической аппроксимации, ориентированные на минимизацию функций квантили высоких порядков. Первый из них основан на доверительном подходе, сводящем исходную задачу к гарантирующей минимаксной. Во втором алгоритме используются непосредственные статистические оценки квантилей, в том числе по выборкам малого объема. При определенных условиях оба алгоритма обеспечивают сходимость почти наверное соответствующих рекуррентных процедур, причем первый — к гарантирующему решению, а второй, более трудоемкий — к точному.

В качестве примера рассматривается задача оптимального выбора параметров ВПП (взлетно-посадочной полосы) при заданном ограничении на безопасность посадки, сводящаяся к задаче безусловной квантильной оптимизации.

1. Постановка задачи. Пусть $\Phi(y, \omega)$: $R^n \times R^m \to R^1$ — непрерывная по совокупности аргументов действительная функция; ω — m-мерный случайный гауссовский вектор с известными параметрами распределения. Определим функции вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathscr{P}\{\omega: \Phi(u, \omega) \leqslant \varphi\}, \qquad \varphi \in R^1 \tag{1.1}$$

и квантили

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi: P_\varphi(u) \geqslant \alpha\}, \qquad \alpha \in (0, 1) \tag{1.2}$$

где $\mathscr{P}\{\cdot\}$ — вероятностная мера, определенная на борелевских множествах в R^m. Использование символа min в (1.2) оправдано, поскольку определенная согласно (1.1) функция $P_\varphi(u)$ неубывающая и непрерывная справа по φ при любом u. Пусть при любых φ, u справедливо равенство: $\mathscr{P}\{\Phi(u, \omega) = \varphi\} = 0$. В этом случае функция $\Phi_\alpha(u)$ непрерывна по u при любом $\alpha \in (0, 1)$. Рассмотрим задачу безусловной минимизации функции квантили

$$u_\alpha = \arg\min_{u \in U} \Phi_\alpha(u), \tag{1.3}$$

где множество допустимых решений U полагается выпуклым компактом в R^n. Основная трудность решения задачи (1.3) состоит в том, что только в исключительных (как правило, тривиальных) случаях значения функции $\Phi_\alpha(u)$ могут быть вычислены аналитически. Более того, в общем случае не существует «хороших», в частности, несмещенных, статистических оценок квантили, что затрудняет построение минимизирующих стохастических процедур.

2. Доверительный подход. Рассмотрим доверительный подход [1] к решению задачи квантильной оптимизации (1.3). Предположим, что: 1) Функция $\Phi(u, \omega)$ — квазивыпуклая по ω при любом $u \in U$, то есть такая, что
$\Phi(u, \lambda\omega_1 + (1-\lambda)\omega_2) \leqslant \max\{\Phi(u, \omega_1), \Phi(u, \omega_2)\}$ для всех $\omega_1, \omega_2, \lambda \in [0, 1]$; 2) Случайный вектор ω является стандартным гауссовским с параметрами $N(0, I)$ (этого всегда можно добиться соответствующей нормировкой).

Рассмотрим доверительный шар E_α меры α и соответствующую ему сферу C в пространстве возмущений:

$$E_\alpha \stackrel{\Delta}{=} \{\omega: \|\omega\| \leqslant r_\alpha\}, \qquad C \stackrel{\Delta}{=} \{\omega: \|\omega\| = r_\alpha\} \tag{2.1}$$

Радиус r_α доверительного шага однозначно определяется из условия: $\mathscr{P}\{E_\alpha\} = \alpha$. Рассмотрим минимаксную задачу

$$u_C = \arg\min_{u \in U} F(u), \qquad F(u) \stackrel{\Delta}{=} \max_{\omega \in C} \Phi(u, \omega), \tag{2.2}$$

внутренний максимум в которой достигается при любом $u \in U$ в силу квазивыпуклости $\Phi(u, \omega)$ по ω и ограниченности множества C. Пусть решения обеих задач (1.3) и (2.2) существуют при любом $\alpha \in (0, 1)$. В этом случае согласно доверительному подходу [1] оптимальные значения критериев связаны неравенством $F(u_C) \geqslant \Phi_\alpha(u_\alpha)$. Более того, $F(u_C) \to \Phi_\alpha(u_\alpha)$ при $\alpha \to 1$. Таким образом, оптимальное значение целевой функции в задаче (1.3) при достаточно большом α может быть с высокой точностью оценено сверху величиной $F(u_C)$, найденной в результате решения минимаксной задачи (2.2). Решение u_C, $F(u_C)$ назовем гарантирующим для задачи (1.3).

Применение стандартных численных методов для решения задачи (2.2) затруднено тем, что в общем случае $\Phi(u, \omega)$ многоэкстремальна по ω на C при любом фиксированном u. Кроме того, при любом $u \in U$ нас интересует не то, в какой именно точке $\omega^*(u)$ достигается максимум функции, а только величина этого максимума (критериальная оптимизация). Значение $F(u)$ в общем случае нельзя найти аналитически, однако можно указать способ нахождения хорошей в некотором смысле статистической оценки $\tilde{F}(u)$, чтобы затем для решения задачи (2.2) воспользоваться методами типа стохастической аппроксимации. Выберем на сфере C множество $\{v_j\}_{j=1}^{t}$ из t равномерно-распределенных случайных точек. Перенумеруем точки v_j этой последовательности так, чтобы значения целевой функции $\Phi(u, v_j)$ образовывали вариационный ряд: $\Phi(u, v_1) \leqslant \leqslant \Phi(u, v_2) \leqslant \ldots \leqslant \Phi(u, v_t)$. Тогда значение $F(u)$ функции максимума может быть оценено статистикой:

$$\tilde{F}_t(u) \stackrel{\Delta}{=} F_t(u) + \frac{m-1}{2}[F_t(u) - F_{t-1}(u)] \tag{2.3}$$

где $F_t(u) \stackrel{\Delta}{=} \Phi(u, v_t)$, $F_{t-1}(u) \stackrel{\Delta}{=} \Phi(u, v_{t-1})$; m — размерность пространства возмущений R^m. Оценка (2.3) функции максимума $F(u)$ является состоятельной и асимптотически несмещенной для всех $u \in U$, причем смещение $z_t(u) \stackrel{\Delta}{=} |M[\tilde{F}_t(u)] - F(u)|$ имеет порядок малости $o(1/t)$ равномерно на любом компакте $U \subset R^n$.

Назовем стохастическим квазиградиентом функции максимума случайный вектор:

$$\xi(u,k) \triangleq \frac{1}{2a_k} \sum_{i=1}^{n} [\tilde{F}_{t_k}(\tilde{u}_1, \ldots, u_i + a_k, \ldots, u_n) -$$

$$- \tilde{F}_{t_k}(\tilde{u}_1, \ldots, u_i - a_k, \ldots, \tilde{u}_n)] e_i \tag{2.4}$$

где $\tilde{u}_i$ — независимые случайные величины, равномерно-распределенные на отрезках $[u_i - a_k,\ u_i + a_k]$; e_i — единичные орты координат, $i = \overline{1,\ n}$; $\{a_k\}$ — детерминированная убывающая последовательность; $\tilde{F}_{t_k}(u)$ — оценки вида (2.3) функции максимума $F(u)$ по выборке объема t_k, зависящего от k. Рассмотрим рекуррентную квазиградиентную процедуру:

$$u^{k+1} = \pi_U(u^k - \rho_k \cdot \xi(u^k,\ k)), \quad u^0 \in U \tag{2.5}$$

в которой $\{\rho_k\}$ — детерминированная убывающая последовательность скалярных коэффициентов; $\pi_U(\cdot)$ — оператор проектирования на выпуклое множество U. Приведем условия, обеспечивающие сходимость почти наверное процедуры (2.4), (2.5) к множеству экстремальных точек задачи (2.2), которые можно получить аналогично [2, 3]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = \infty; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 < \infty; \qquad a_k \to 0; \qquad t_k \to \infty;$$

$$a_k \cdot t_k \to \infty; \qquad \frac{k}{a_k \cdot t_k^{(m-1)/2}} \to 0.$$

Из приведенных условий следует, что объем выборки t_k должен возрастать с ростом k — шагом процедуры, причем тем быстрее, чем выше размерность пространства возмущений, однако с учетом того, что точное решение задачи (2.2) является гарантирующим для исходной задачи (1.3), на практике величину t_k можно ограничить некоторой величиной T, при которой смещение $z_T(u)$ оценки (2.3) оказывается величиной пренебрежимо малой для всех $u \in U$.

3. Прямой метод минимизации функции квантили. Пусть при любом u имеется возможность получения выборки значений $\{\Phi(u,\ \omega_j)\}_{j=1}^{t}$ функции $\Phi(u,\ \omega)$, где $\{\omega_j\}_{j=1}^{t}$ — независимые реализации случайного вектора ω. Обозначим через $\{\Phi_j(u)\}_{j=1}^{t}$ — вариационный ряд выборки, то есть расположенные в порядке возрастания члены совокупности значений: $\Phi_1(u) \leqslant \Phi_2(u) \leqslant \ldots \leqslant \Phi_t(u)$. При сделанном предположении о нормальном законе распределения случайного вектора ω распределение случайной величины $\Phi(u,\ \omega)$ (рассматриваемой как функция только случайного аргумента) абсолютно непрерывно по ω для любого $u \in U$. Известно, [4], что в этом случае средние члены вариационного ряда асимптотически при $t \to \infty$ представимы в виде:

$$\Phi_{[\alpha \cdot t]+1}(u) \cong \Phi_\alpha(u) + \frac{v}{f_u(\Phi_\alpha(u))} \sqrt{\frac{\alpha \cdot (1-\alpha)}{t}} \tag{3.1}$$

где $[\alpha \cdot t]$ — целая часть числа $\alpha \cdot t$, $\alpha \in (0,\ 1)$; v — случайная величина со стандартным нормальным распределением; $f_u(\cdot)$ — плотность распределения случайной величины $\Phi(u,\ \omega)$; $\Phi_\alpha(u)$ — ее квантиль распределения порядка α. Из (3.1) очевидно следует, что статистика

$$\tilde{\Phi}_\alpha^t(u) \triangleq \Phi_{[\alpha \cdot t]+1}(u) \tag{3.2}$$

является асимптотически несмещенной, $\sqrt{t}$ — состоятельной оценкой квантили $\Phi_\alpha(u)$ при любом фиксированном $u \in U$. Причем смещение $z_t(u) \triangleq |M\tilde{\Phi}_\alpha{}^t(u)] - \Phi_\alpha(u)|$ имеет порядок малости $O(1/t)$ равномерно на любом компакте U, то есть существует не зависящая от t константа $C_U < \infty$ такая, что $z_t(u) \leqslant \frac{C_U}{t}$, $\forall u \in U$. Оценка (3.2) оказывается неудобной при работе с квантилями высокого порядка α. Связано это с тем, что необходимый объем выборки не может быть меньше числа $T_\alpha = \left[\frac{1}{1-\alpha}\right] + 1$.

В противном случае оценка оказывается нечувствительной к изменению α. Более того, поскольку представление (3.1) справедливо только для средних членов вариационного ряда, необходимо, чтобы его крайние члены в среднем превышали значение оцениваемой квантили, а это значит, что объем выборки должен быть больше числа T_α по крайней мере в несколько раз. При этом всякий раз для получения оценки (3.2) приходится, по сути, строить эмпирическую функцию распределения случайной величины $\Phi(u, \omega)$.

Рассмотрим оценки иного рода, основанные на использовании асимптотических свойств экстремальных порядковых статистик, то есть крайних правых членов вариационного ряда: $\{\Phi_j(u)\}_{j=t-k}^{t}$, $k \ll t$. Подобно тому, как распределение средних членов ряда асимптотически при $t \to \infty$ подчиняется нормальному закону, предельные распределения экстремальных порядковых статистик в ряде случаев также подчиняются известным (отличным от нормального) законам [4, 5]. Знание этих законов позволяет достаточно просто оценить значение функции квантили по выборке объема, не превышающего T_α. Определим зависящую от u статистику:

$$\tilde{\Phi}^t(u) \triangleq \Phi_t(u) - \mu \cdot [\Phi_t(u) - \Phi_{t-1}(u)],$$

где $\Phi_t(u)$, $\Phi_{t-1}(u)$ — соответственно крайний и второй справа члены вариационного ряда выборки объема $t > 1$; $\mu = 0{,}5772\ldots$ — константа Эйлера. Пусть $C(t) = \frac{t-1}{t}$; U — компакт в R^n. Тогда можно показать, что

$$z_t(u) \triangleq |M[\tilde{\Phi}^t(u)] - \Phi_{C(t)}(u)| = O\left(\frac{1}{t}\right)$$

равномерно по U, где $\Phi_{C(t)}(u)$ — функция квантили порядка $C(t) \in (\emptyset, 1)$. Таким образом, статистика

$$\tilde{\Phi}_\alpha^{t(\alpha)}(u) \triangleq \Phi_{t(\alpha)}(u) - \mu \cdot [\Phi_{t(\alpha)}(u) - \Phi_{t(\alpha)-1}(u)], \qquad (3.3)$$

определяемая по выборке конечного объема $t(\alpha) = \left[\frac{1}{1-\alpha}\right] + 1$, может быть использована в качестве оценки квантили, причем смещение ее будет тем меньшим, чем ближе к 1 порядок квантили α. Оценка (3.3) очень проста, по мере получения очередной серии реализаций $\Phi(u, \omega_j)$ необходимо помнить только две наихудшие из них, тогда как для получения оценки (3.2) требовалось запомнить и упорядочить всю выборку, и при том большего объема. Простота оценки (3.3) делает ее удобной для использования в стохастических рекуррентных процедурах, когда значения функции квантили необходимо оценивать многократно при различных значениях аргумента.

Нормальность случайного аргумента ω и липшицевость по ω функции $\Phi(u, \omega)$ предоставляют возможность оценить квантиль высокого порядка

α по выборке еще меньшего, чем $t(\alpha)$ объема:

$$\widetilde{\Phi}_\alpha{}^t(u) \overset{\Delta}{=} \Phi_t(u) - [\Phi_t(u) - \Phi_{t-1}(u)][\mu + \ln(t) + \ln(1-\alpha)] \qquad (3.4)$$

При $\alpha = (t-1)/t$ оценка (3.4) совпадает с (3.3).

Назовем стохастическим квазиградиентом функции квантили случайный вектор:

$$\xi_t(u, a) \overset{\Delta}{=} \frac{1}{2a} \cdot \sum_{i=1}^{n} [\widetilde{\Phi}_\alpha{}^t(\tilde{u}_1, \ldots, u_i + a, \ldots, \tilde{u}_n) - \widetilde{\Phi}_\alpha{}^t(\tilde{u}_1, \ldots, u_i - a, \ldots, \tilde{u}_n)] \cdot e_i \qquad (3.5)$$

где $\tilde{u}_i$ — независимые случайные величины, равномерно-распределенные на интервалах $[u_i - a,\ u_i + a]$; $\widetilde{\Phi}_\alpha{}^t(u)$ — статистические оценки функции квантили вида (3.2), (3.3), (3.4); e_i — единичные орты координат, $i = \overline{1, n}$; $a > 0$ — некоторая константа сглаживания. Пусть скалярные последовательности $\rho_k > 0$, $a_k > 0$ и целочисленная последовательность t_k удовлетворяют условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = \infty; \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 < \infty; \qquad a_k \to 0; \qquad t_k \to \infty;$$

$$a_k \cdot t_k \to \infty; \qquad \frac{k}{a_k \cdot t_k^2} \to 0.$$

Пусть начиная с некоторого K для всех $k > K$ в последовательности оценок $\{\widetilde{\Phi}_\alpha{}^{t_k}(u)\}_{k=1}^{\infty}$ присутствуют только оценки вида (3.2). Тогда с вероятностью 1 все предельные точки последовательности:

$$u^{k+1} = \pi_U(u^k - \rho_k \cdot \xi_{t_k}(u^k, a_k)), \qquad u^0 \in U \qquad (3.6)$$

принадлежат множеству экстремальных точек задачи (1.3). Использование в процедуре оценок (3.3), (3.4) имеет смысл на начальной стадии решения для быстрого выхода в окрестность экстремальной точки.

4. Оптимизация параметров ВПП при заданном ограничении на безопасность посадки. Пусть L_0 — номинальная длина пробéга самолета по ВПП при посадке. Обозначим ξ_L, ξ_Z — продольное и боковое отклонения самолета от расчетной точки касания, вызванные влиянием ветра на процесс посадки. Пусть модель влияния продольной (ω_L) и боковой (ω_Z) составляющих ветра на ξ_L и ξ_Z является следующей:

$$\xi_L = a_{11} \cdot \omega_L + a_{12} \cdot |\omega_Z|; \qquad \xi_Z = a_{22} \cdot \omega_Z \qquad (4.1)$$

Подобная модель имеет место, например [1], когда на траекторию движения самолета влияет лишь угол крена. По предположению ω_L, ω_Z — независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами $N(m_L, \sigma_L^2)$, $N(m_Z, \sigma_Z^2)$; a_{11}, a_{12}, a_{22} — заданные коэффициенты сноса. Поставим задачу выбора параметров ВПП: L_1, L_2, Z, представляющих собой запас полосы соответственно на случаи недолета, перелета и бокового промаха самолета из условия минимума площади ВПП:

$$S(L_1, L_2, Z) \overset{\Delta}{=} 2 \cdot Z \cdot (L_0 + L_1 + L_2) \to \min_{L_1, L_2, Z} \qquad (4.2)$$

при выполнении ограничения, гарантирующего удачную посадку с вероятностью, не ниже заданного уровня безопасности α:

$$P(L_1, L_2, Z) \overset{\Delta}{=} \mathscr{P}\{\xi_L, \xi_Z: -L_1 \leqslant \xi_L \leqslant L_2,\ |\xi_Z| \leqslant Z\} \geqslant \alpha \qquad (4.3)$$

Отметим, что вероятность $P(L_1, L_2, Z)$ в данном случае не удается представить в виде аналитической зависимости от своих аргументов, поэтому

для проверки ограничения (4.3) требуется либо проводить численное интегрирование, либо воспользоваться методом статистического моделирования Монте-Карло. С увеличением требуемой в условии вероятности α (по смыслу задачи она должна быть близкой к 1), оба способа ведут к чрезмерным вычислительным затратам. Связано это с тем, что для отделения оцениваемой вероятности от 1 в первом случае необходимо уменьшать шаг дискретизации, а во втором — увеличивать число испытаний пропорционально величине $1/(1-\alpha)^2$, [1, стр. 258] (или использовать специальные способы уменьшения дисперсии оценки, как, например, метод существенной выборки).

Покажем, каким образом задача (4.2) условной минимизации с вероятностным ограничением (4.3) может быть сведена к задаче безусловной минимизации функции квантили. Для этого перейдем к новым независимым переменным, взаимно-однозначно связанным с L_1, L_2, Z:

$$u_1 \stackrel{\Delta}{=} \frac{L_1}{L_2}; \quad u_2 \stackrel{\Delta}{=} \frac{L_0+L_1+L_2}{2Z}; \quad S=(L_0+L_1+L_2)\cdot 2Z \tag{4.4}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &Z(u_2, S)=\sqrt{\frac{S}{4u_2}}; \quad L_1(u_1, u_2, S)=\frac{[\sqrt{S\cdot u_2}-L_0]\cdot u_1}{1+u_1} \\ &L_2(u_1, u_2, S)=\frac{\sqrt{S\cdot u_2}-L_0}{1+u_1} \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

Перепишем (4.3) в новых обозначениях:

$$P_S(u_1, u_2) \stackrel{\Delta}{=} \mathscr{P}\{\xi_L\xi_Z : -L_1(u_1, u_2, S)\leqslant\xi_L\leqslant L_2(u_1, u_2, S), \ |\xi_Z|\leqslant Z(u_2, S)\}\geqslant\alpha \tag{4.6}$$

Обратим внимание, что функции $L_1(u_1, u_2, S)$, $L_2(u_1, u_2, S)$, $Z(u_2, S)$ строго монотонны по S при фиксированных u_1, u_2, и разрешимы относительно S. Обозначим $L_1^{-1}(u_1, u_2, \xi_L)$, $L_2^{-1}(u_1, u_2, \xi_L)$, $Z^{-1}(u_2, \xi_Z)$ — обратные (относительно S) функции. Определим случайную величину

$$\Phi(u_1, u_2, \xi_L, \xi_Z) \stackrel{\Delta}{=} \max\{-L_1^{-1}(u_1, u_2, \xi_L), \ L_2^{-1}(u_1, u_2, \xi_L), \ |Z^{-1}(u_2, \xi_Z)|\} \tag{4.7}$$

Перепишем (4.6) еще раз в эквивалентном виде:

$$P_S(u_1, u_2)=\mathscr{P}\{\xi_L, \ \xi_Z: \ \Phi(u_1, u_2, \xi_L, \xi_Z)\leqslant S\}\geqslant\alpha \tag{4.8}$$

Тогда существует минимальное значение $S_\alpha(u_1, u_2)$ параметра S, гарантирующее выполнение вероятностного ограничения $P_S(u_1, u_2)\geqslant\alpha$, то есть квантиль порядка α распределения случайной величины $\Phi(u_1, u_2, \xi_L, \xi_Z)$. Задача (4.2), (4.3) оказывается эквивалентной задаче минимизации функции квантили:

$$(u_1^*, u_2^*) = \arg\min_{u_1,u_2} S_\alpha(u_1, u_2) \tag{4.9}$$

В случае, если задачу (4.9) удастся решить, оптимальные значения L_1^*, L_2^*, Z^* исходных параметров можно найти обратным переходом (4.5).

5. Результаты численного решения. Задача решалась на IBM—PC/AT при заданных параметрах: $a_{11}=-20$[c]; $a_{12}=-20$[c]; $a_{22}=3$[c]; $L_0=1500$[м]; $M[\omega_L]=M[\omega_Z]=\emptyset$; $\sigma[\omega_L]=\sigma[\omega_Z]=5$[м/с] для различных значений α. Результаты решения сведены в таблицу. Из таблицы видно, что хотя с увеличением α доверительный подход действительно дает величину гарантированного критерия все более близкую к точному, полученному с помощью прямого метода, скорость этой сходимости невысока. Иными словами, полученное с помощью доверительного подхода решение оказывается очень осторожным. С другой стороны, при использова-

Таблица

α	u_1 *	u_2 *	S_α (u_1*, u_2*) [км²]	Время счета (сек.)	Метод
0.99	1.877	26.27	0.170	84	Прямой
	1,483	24.36	0.202	18	Доверит.
0.999	1.962	23.26	0.236	210	Прямой
	1.483	21.34	0,256	30	Доверит.
0.9999	2.034	21.28	0.304	720	Прямой
	1.483	19.55	0.324	48	Доверит.
0.99999	2.120	19.20	0.366	3600	Прямой
	1.484	18.31	0.380	72	Доверит.
0.999999	*	*	*	*	Прямой
	1.484	17.40	0.432	90	Доверит.

* — задача не решалась.

нии прямого метода с увеличением α быстро возрастает время счета, тогда как для доверительного подхода оно практически не меняется.

Заключение. Предложены и рассмотрены два численных алгоритма для решения задач минимизации функций квантили. Полученные при решении модельной задачи результаты позволяют оценить достоинства и недостатки каждого из них. Очевидно, что прямой метод следует использовать при повышенных требованиях к точности результатов, когда имеется возможность пойти на увеличение вычислительных затрат. Однако следует учитывать, что при высокой требуемой вероятности выполнения ограничения оценка гарантированного результата может быть получена гораздо быстрее с помощью доверительного подхода, тем более точная, чем выше требуемая вероятность. На модельном примере показана возможность сведения задачи с вероятностным ограничением к задаче безусловной квантильной оптимизации. По-видимому, подобным приемом можно воспользоваться при решении достаточно широкого круга задач оптимизации с вероятностными ограничениями и, если требуемая в условии вероятность выполнения ограничения задается близкой к 1 (от 0.999 и выше), описанные в настоящей статье алгоритмы квантильной оптимизации могут оказаться незаменимыми. В заключение отметим, что в рассмотренном модельном примере принятая модель влияния ветра на промах может быть уточнена в соответствии с условиями конкретной задачи. В частности, модель процесса посадки может быть динамической, а реализации промаха могут вычисляться на основе решения системы дифференциальных уравнений. Такое усложнение задачи не накладывает никаких принципиальных ограничений на возможность применения обоих алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малышев В. В., Кибзун А. И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.
2. *Ермольев Ю. П.* Методы стохастического программирования. М.: Наука, 1976.
3. *Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. Н.* Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987.
4. *Дэйвид Г.* Порядковые статистики. М.: Наука, 1984.
5. *Галамбош Я.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик. М.: Наука, 1984.

Москва

Поступила в редакцию 8.VI.1990

после доработки 24.X.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 • 1991

УПРАВЛЕНИЕ И ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

УДК 62-50

В. Ю. БОЧАРОВ, А. А. МЕЛИКЯН

ЗАДАЧА ГАРАНТИРОВАННОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ПОИСКОМ ЦЕЛЕВОЙ ТОЧКИ В МНОГОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Дана формулировка задачи гарантированного быстродействия при неполной информации о положении целевой точки, известной в начальный момент с точностью до некоторой заданной области неопределенности. Эта точка обнаруживается при попадании в так называемую информационную область, движущуюся вместе с фазовым вектором системы. Рассмотрена двумерная система, описывающая движение точки, управляемой по скорости; возможности наблюдения описываются информационной полуплоскостью, а в качестве области неопределенности фигурирует произвольный выпуклый многоугольник. Дано полное решение задачи гарантированного быстродействия. Существенным элементом решения является особая траектория – движение по некоторой ломаной, к которой подходят прямолинейные оптимальные траектории. Разработан алгоритм численного построения поля оптимальных траекторий и решения задачи синтеза оптимального управления. Приведены результаты численного расчета.

Введение. В задачах управления в робототехнике и ряде других областей имеют место ситуации, когда на начальном этапе движения управляющей стороне информация о целевой точке (о положении, в которое следует привести управляемую систему) доступна лишь с некоторой неопределенностью. Необходимая для реализации условий окончания процесса информация поступает к управляющей стороне после того, как зона чувствительности соответствующего датчика, например видеокамеры, установленной на одном из звеньев робота-манипулятора, охватит окрестность целевой точки.

В этих условиях возникает задача о более рациональном или оптимальном выборе траектории движения с учетом упомянутого поиска.

Математической моделью описанной задачи управления при наличии неопределенности может служить обычная двухточечная задача быстродействия [1], в которой правый конец траектории (целевая точка) задан с точностью до некоторого множества неопределенности. Целевая точка считается известной точно при попадании в так называемую информационную область, движущуюся вместе с фазовым вектором управляемой системы. Игровая задача об оптимальном гарантированном управлении подобной системой сформулирована впервые в [2], где приведены также решения простых примеров. В работе [3] введен класс кусочно-программных управлений и дано полное решение плоской задачи с простым движением, произвольной выпуклой областью неопределенности с гладкой границей и информационной областью, представляющей собой полуплос-

кость. Существенным элементом решения здесь является особая криволинейная траектория поиска, к которой с одной стороны с касанием подходят прямолинейные траектории поиска; по другую сторону особой кривой оптимальные траектории поиска определены неоднозначно, однако могут быть выбраны также прямолинейными.

Подход данной работы и статей [2, 3] отличается от других формулировок задач поиска [4, 5] тем, что здесь требуется не только обнаружить целевую точку, в качестве которой может служить как неподвижный, так и подвижный объект, но и осуществить приведение в нее фазового вектора управляемой системы.

В данной работе, как и в [2], рассмотрена двумерная система, управляемая по скорости; возможности наблюдений описываются информационной полуплоскостью, а в качестве области неопределенности фигурирует произвольный выпуклый многоугольник. Введено в рассмотрение понятие гарантирующей линии, с помощью которого найдено оптимальное поле траекторий поиска; установлено, что особые траектории являются ломаными линиями. Разработан алгоритм численного построения этого поля, а также построения управления по обратной связи. Алгоритм устанавливает определенную связь между задачами работ [2, 3]. При большом числе вершин многоугольника алгоритм дает сколь угодно точное дискретное приближение к решению задачи статьи [3]. При минимальном числе вершин, равном двум (тогда область неопределенности представляет собой отрезок), получаем решение примера из работы [2]. Приведены результаты численных расчетов.

1. Динамические уравнения и условия информированности. Дадим общую постановку задачи гарантированного быстродействия с поиском целевой точки. Пусть двухточечная задача оптимального быстродействия задается с помощью соотношений

$$\dot{x}=f(x, u, t), \quad u\in U, \quad t\in[t_0, T], \quad x(t_0)=x^0, \quad x(T)=x^1,$$
$$J=T-t_0\to\min. \tag{1.1}$$

Здесь $x\in R^n$ — фазовый вектор, $u\in R^m$ — вектор управления, U — множество его допустимых значений, x^0 и x^1 — начальное и конечное значения фазового вектора. Точка x^0 известна управляющей стороне. О точке x^1 известно только лишь, что имеет место включение

$$x^1\in D, \quad D\subset R^n, \tag{1.2}$$

где D — заданное множество неопределенности, также известное управляющей стороне.

Управляющая сторона имеет возможность уточнять информацию с помощью подвижной информационной области $G=G(x(t))$, зависящей от текущего значения фазового вектора системы.

Область $G(x)$ для любого вектора $x\in R^n$ строится следующим образом. В пространстве R^n задана фиксированная область G_0. Сопоставим каждому $x\in R^n$ область

$$G(x)=\{\xi\in R^n : \xi-x\in G_0\}, \tag{1.3}$$

получаемую из области G_0 сдвигом на вектор x. Очевидно, что $G_0=G(0)$. Информационной областью, соответствующей фазовому вектору $x(t)$, будем называть область $G(x(t))$. Таким образом, область G зафиксирована в подвижной системе координат с началом в точке $x(t)$ и осями, параллельными осям исходной системы координат. Относительная ориентация области $G(x(t))$ и вектора $x(t)$ остается неизменной по времени. Точка $x(t)$ может принадлежать области $G(x(t))$, либо лежать вне ее, в зависимости от того, содержит ли область $G_0=G(0)$ начало координат. Эту фиксированную относительно $G(x)$ точку x (аргумент в зависимости $G(x)$) будем называть наблюдателем — местом наблюдателя. Описанный способ построения подвижной информационной области $G(x(t))$ означает,

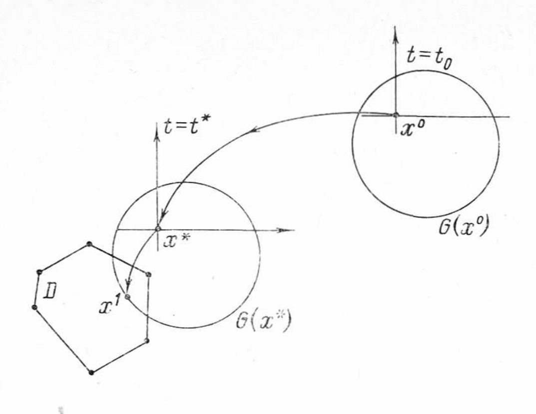


Рис. 1

что фазовый вектор $x(t)$ совмещается с местом наблюдателя. В этом смысле иногда вектор $x(t)$ будем называть наблюдателем.

По предположению, $x^1 \notin G(x^0)$. Вектор x^1 становится известным управляющей стороне в момент времени $t=t_* > t_0$, когда выполняется следующее условие наблюдения (рис. 1):

$$x^1 \in G(x(t)), \quad t=t_*. \tag{1.4}$$

В процессе движения по траектории $x(t)$, соответствующей некоторому управлению $u(t)$, управляющая сторона в каждый момент времени располагает величинами t, $x(t)$ и информацией о том, выполнено включение (1.4) или нет, а в случае выполнения получает точную информацию о векторе x^1.

Ограничения на области D и G могут быть довольно общими. Область D должна быть ограниченной, чтобы реализовалось конечное время приведения T. В рассматриваемых конкретных задачах области D и G являются, как правило, выпуклыми и односвязными.

2. Допустимые управления, минимаксная задача. Поскольку точка x^1 в начальный момент t_0 точно не известна, то не существует чисто программных управлений, т. е. заданных в виде функции времени на всем интервале $[t_0, T]$, осуществляющих условие $x(T)=x^1$. Информация о точке x^1 появляется в момент наблюдения t_*, после которого это условие становится реализуемым. Поэтому в соответствии с информационными возможностями управляющей стороны целесообразно использовать класс кусочно-программных управлений с двумя участками программного управления. Дадим точное определение.

Допустимыми будем считать кусочно-программные управления с двумя участками программного управления, задающиеся парой функций

$$u=\{u_0(x^0, t);\ u_1(x^*, t_*, x^1, t)\}, \tag{2.1}$$

принимающих значения из области U. Здесь величины x^0, x^1, x^*, t_* играют роль параметров со значениями в областях $x^0 \in R^n \setminus X_0$, $x^* \in X_1$, $x^1 \in D$, $t_* \geqslant t_0$. Здесь использованы обозначения:

$$X_1=\{x \in R^n : G(x) \cap D \neq \emptyset\}, \qquad X_0=\{x \in R^n : D \subset G(x)\}. \tag{2.2}$$

Другие определяющие параметры t_0, D, G_0 в обозначении функции u_0 опущены. По времени функции u_i определены на достаточно больших интервалах $t_0 \leqslant t \leqslant \theta_0$, $t_* \leqslant t \leqslant \theta_*$; на характер зависимости от t, а также на свойства функций в (1.1) наложим самые общие требования, обеспечивающие существование и единственность решения системы (1.1) на рассматриваемом интервале времени. Для конструирования управления вида (2.1) кроме начальной информации необходимо в процессе движения в

какой-то заранее неизвестный момент t_* получить точную информацию о параметрах x^*, t_*, x^1.

Движение системы (1.1), соответствующее некоторому управлению вида (2.1), строится следующим образом. Уравнение (1.1) интегрируется с управлением $u_0(x^0, t)$ при $t \geqslant t_0$ до момента t_* выполнения условия (1.4), когда становится известен вектор x^1. Затем используется управление $u_1(x^*, t_*, x^1, t)$, $t_* \leqslant t \leqslant T$, приводящее к условию $x(T) = x^1$. Дополнительным требованием к допустимым управлениям (2.1) является существование конечных моментов x_*, T. Пусть для всех рассматриваемых x^0 множество допустимых управлений не пусто. Тогда при фиксированном x^0 каждому допустимому управлению u и каждому вектору $x^1 \in D$ будет соответствовать траектория системы (1.1), приходящая в точку x^1, и время приведения $J(x^0, x^1, u) = T - t_0$.

Сформулируем задачу о минимальном гарантированном времени приведения в точку x^1.

Задача 1. Найти минимальное гарантированное время быстродействия $J_*(x^0)$ и допустимое управление u^*, доставляющее минимум

$$J_*(x^0) = \min_u \sup_{x^1} J(x^0, x^1, u) = \sup_{x^1} J(x^0, x^1, u^*), \quad x^1 \in D \setminus (D \cap G(x^0)). \tag{2.3}$$

Минимизация здесь проводится по всем допустимым управлениям. Предполагается, что минимум достигается. Вычисление точной верхней грани, а не максимума по x^1 (2.3) объясняется тем, что множество значений x^1 может оказаться незамкнутым. В принципе, в (2.3) можно ограничиться случаем $x^1 \in D$, переходя к более узкому множеству неопределенности путем удаления из нее части $D \cap G(x^0)$, если она не пуста. Эта часть исключена из рассмотрений в (2.3), поскольку при $x^1 \in D \cap G(x^0)$ имеет место полная информация о целевой точке.

Нетрудно видеть, что вторая компонента решения задачи 1, т. е. управление $u_1^*(x^*, t_*, x^1, t)$, является оптимальной программой быстродействия для системы (1.1) с полной информацией о начальной позиции x^*, t_* и конечном векторе x^1. Это управление будем считать в принципе известным: существует много методов численного аналитического решения таких задач. Тогда основным искомым объектом будет управление поиска $u_0(x^0, t)$ и соответствующая траектория поиска.

Одной из возможных наглядных интерпретаций описанной выше управляемой системы с наблюдениями является отождествление информационной области $G(x(t))$ со световым пятном, которое можно управляемым образом перемещать в «темном» пространстве с целью освещения (обнаружения) неподвижного объекта x^1, находящегося в пределах заданной области D.

Сложность эффективного построения решения задачи 1 обусловливается сложностью динамики управляемого объекта (1.1) и геометрии областей D, G. Общий подход к анализу рассматриваемой задачи удалось пока предложить лишь для двумерной системы с простой динамикой [3]; основа подхода состоит в отыскании специальных (особых) траекторий поиска и в сведении к вспомогательной задаче оптимального управления, для которой могут быть использованы известные методы решения. Подобный подход привел также к успеху в задаче гарантированного быстродействия с поиском целевой точки для материальной точки, управляемой по ускорению.

Отметим одно простое следствие соотношения (2.3), включив в обозначение гарантированного времени также и соответствующую область неопределенности

$$J_*(x^0, D') \leqslant J_*(x^0, D), \qquad D' \subset D \tag{2.4}$$

3. Двумерная задача. Пусть система (1.1) описывает управляемое по скорости движение точки по двумерной плоскости, причем скорость огра-

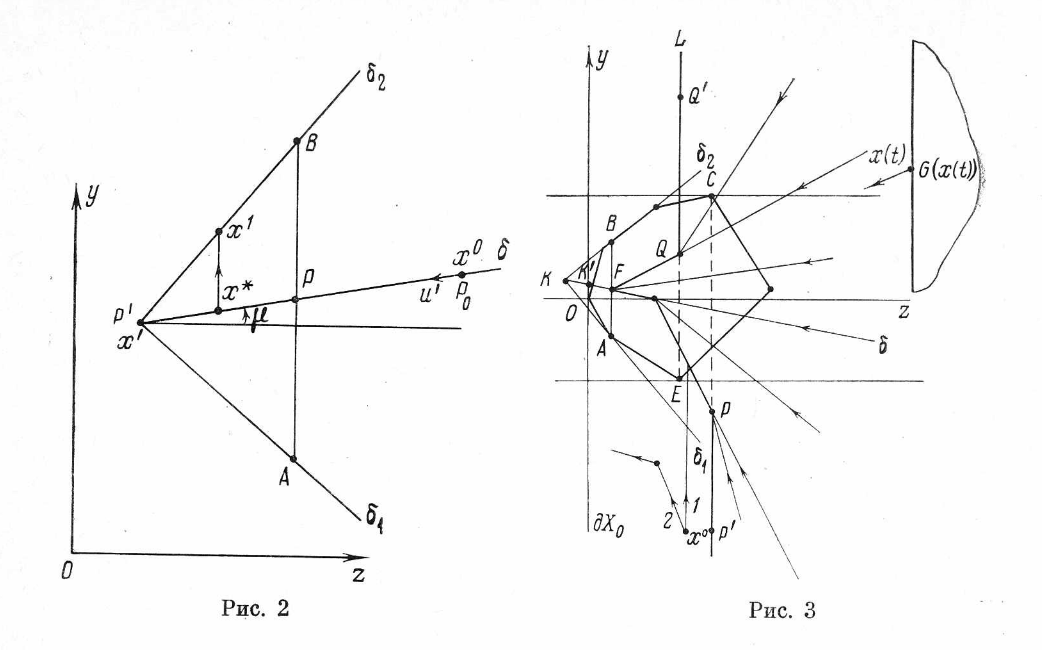


Рис. 2 Рис. 3

ничена по модулю (точка совершает простое движение)

$$\dot{x}=u, \quad |u|\leqslant 1, \quad x=(z,\ y)\in R^2, \quad x(t_0)=x^0, \quad x(T)=x^1. \qquad (3.1)$$

Множество D является выпуклым многоугольником, а область G_0 — полуплоскостью с наблюдателем, лежащим на ее границе.

Отличие данной задачи от примера, рассмотренного в [3], состоит в форме области D, благодаря которой построения, вообще говоря, несколько упрощаются.

Поместим начало прямоугольной системы координат Ozy в одну из вершин многоугольника D так, чтобы ось y оказалась параллельной границе полуплоскости G_0 и ниже начала координат на оси y не было бы других вершин D; ось z направим так, чтобы область D лежала в полуплоскости $z\geqslant 0$; без ограничения общности, G_0 можно считать правой полуплоскостью.

Обратимся к построению особой траектории поиска, состоящей из двух ломаных линий, приходящих в некоторую точку F области D, называемую фокусом. Здесь и далее наряду с векторным для точек плоскости (как геометрических (аффинных) объектов) будем использовать обозначение прописными буквами.

Введем понятие гарантирующей линии, которое будет применяться в построениях. Зафиксируем в плоскости $(z,\ y)$ некоторый луч (полупрямую) δ с началом в точке $x'(P')$ (рис. 2). Угол между лучом δ и осью Oz обозначим через μ, $|\mu|\leqslant\frac{\pi}{2}$. Пусть управляемая точка (3.1) движется с максимальной скоростью u' вдоль δ в сторону точки x'. Таким образом, $\delta=\{x\in R^2 : x=x'-u'\tau,\ \tau\geqslant 0\}$, где $u'=(-\cos\mu,\ -\sin\mu)$, а τ — время движения до точки x'. Гарантирующей линией $\gamma(x',\ \mu)$ назовем геометрическое место целевых точек x^1, время движения до которых не зависит от местоположения x^1 на γ и равно длине $|P_0P'|$ отрезка P_0P' при старте из точки $P_0\in\delta$. При этом предполагается, что после наблюдения в момент t_* точки x^1 управляемая точка (3.1) сходит с луча δ и движется по вертикали от точки x^* к x^1 также с максимальной скоростью (рис. 2).

Лемма 1. Гарантирующая линия представляет собой прямой угол, образуемый двумя лучами δ_1, δ_2, исходящими из точки x' под углами

$\dfrac{\mu}{2} \mp \dfrac{\pi}{4}$ к оси Oz соответственно. Обоснование леммы опирается на тождество $|P_0P|+|PB|=|P_0P|+|PA|=|P_0P'|$ относительно точки P из отрезка P_0P'. Здесь AB — вертикальный отрезок.

Полупрямую δ будем называть определяющим лучом линии γ. Гарантирующая линия определена с использованием информационной области и динамики управляемой системы.

Рассмотрим теперь совокупность линий $\gamma(x', \mu)$, $|\mu| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, описанных вокруг области неопределенности D, т. е. таких, что область D лежит в пределах замкнутой области, ограниченной прямым углом γ, и имеет общие точки с обоими лучами δ_1, δ_2; полагаем при этом, что вершина x' принадлежит каждому из лучей. Выбор области изменения угла μ соответствует тому, что область G_0 является правой полуплоскостью. Нетрудно убедиться, что каждому μ, $|\mu| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, соответствует единственная линия $\gamma(x', \mu)$, описанная вокруг D, при некотором x'.

Линию γ из огибающего область D семейства назовем фокальной, если существуют общие точки A, B области D с лучами δ_1, δ_2, $A \in D \cap \delta_1$, $B \in D \cap \delta_2$ (рис. 3), лежащие на одной вертикали, быть может вырождающейся в точку x'. Подобный вертикальный отрезок AB с наибольшей абсциссой будем называть фокальным, а его середину F — фокусом (рис. 3). Через фокус F проходят определяющие лучи всех фокальных гарантирующих линий.

Л е м м а 2. Для любого выпуклого многоугольника D фокальный отрезок (а, следовательно, и фокус) существует и единствен. Часть определяющего луча всякой фокальной линии γ, лежащая справа от оси y, является оптимальной траекторией поиска.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Лучи δ_1, δ_2 линии $\gamma(x', \mu)$ из огибающего семейства являются частями опорных прямых многоугольника ∂D, поэтому пересекаются с ним в отдельной точке — вершине, либо по отрезку — стороне многоугольника. Обозначим через $Q_i(\mu)$ множество абсцисс точек пересечения $\delta_i \cap \partial D$, $i=1, 2$. Графики многозначных зависимостей $Q_i(\mu)$, $|\mu| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ являются непрерывными ломаными линиями со взаимно перпендикулярными звеньями (рис. 3). Зависимость $Q_1(\mu)$ — неубывающая, $Q_2(\mu)$ — невозрастающая, причем $Q_1\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = Q_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Следовательно, их графики пересекаются либо в точке, либо по отрезку. Точка пересечения с максимальной ординатой определяет единственным образом фокальный отрезок AB и фокус F.

Для доказательства оптимальности определяющих лучей рассмотрим задачу 1 с областью неопределенности D', состоящей из двух точек A и B — концов фокального отрезка. Очевидно, что оптимальная траектория поиска, начинающаяся в точке P_0 справа от вертикали L_F, проходящей через фокус, должна быть отрезком прямой с левым концом F' на прямой L_F. Время движения до целевой точки будет равно $|P_0F'|+|F'A|$ либо $|P_0F'|+|F'B|$ в зависимости от того, обнаружится ли целевая точка в A или B. Знаком модуля здесь обозначены длины соответствующих отрезков. Данное однопараметрическое с параметром F' семейство траекторий содержит оптимальную траекторию. Минимакс (2.3) сводится к следующему:

$$J(P_0) = \min_{F'} (|P_0F'| + \max\{|F'A|, |F'B|\}), \qquad F' \in L_F.$$

Проводя вычисления, можно установить, что минимум достигается при $F'=F$. По свойству описанной гарантирующей линии имеем $J(P_0, D) \leqslant J(P_0, D')$. Поскольку соотношение (2.4) дает неравенство противоположного знака, то здесь имеет место равенство. Наконец, траекторией поиска будет лишь часть определяющего луча, лежащая в правой полуплоскости, поскольку всякая траектория поиска должна заканчиваться на оси ординат, т. е. на границе множества X_0 из (2.3), откуда целевая точка наблюдается гарантированно. Лемма доказана.

Обратимся к построению особых траекторий поиска. Обозначим через $C(E)$ вершину области D с наибольшей (наименьшей) ординатой; если вершин две, то $C(E)$ означает вершину, ближайшую к оси ординат (рис. 3). Ломаную $AE(BC)$ — участок границы ∂D — будем называть нижней (верхней) ломаной. Сопоставим нижней (верхней) ломаной $AE(BC)$ ломаную $FQQ'(FPP')$, исходящую из точки F, и назовем ее верхней (нижней) огибающей (рис. 3). Каждому звену ломаной $AE(BC)$ соответствует звено огибающей $FQQ'(FPP')$ с общей проекцией на ось абсцисс. Угол наклона β — звена ломаной и μ — звена огибающей связаны соотношением

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{\operatorname{tg}^2\beta - 1}{2\operatorname{tg}\beta}, \qquad \beta = \frac{\mu}{2} \mp \frac{\pi}{4}, \tag{3.2}$$

означающим, что звено огибающей лежит на определяющем луче некоторой гарантирующей линии, а звено ломаной — на луче $\delta_1(\delta_2)$ этой линии (см. лемму 1). Последнее звено верхней (нижней) огибающей представляет собой вертикаль, уходящую вверх (вниз), с абсциссой точки $E(C)$.

Л е м м а 3. Верхняя и нижняя огибающие, дополненные участком FK' фокального определяющего луча, являются оптимальными (особыми) траекториями поиска; движение происходит в сторону точки F с максимальной скоростью. Гарантированное время приведения равно времени движения от точки старта по вертикали до соответствующей ломаной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим нижнюю огибающую. Оптимальное время (2.3) не может быть меньше, чем указанное в лемме, поскольку целевая точка может оказаться сколь угодно близко к верхнему концу вертикали, лежащему на ломаной BC. Очевидно, наихудшие положения целевой точки соответствуют ломаным AE и BC, т. е. при максимизации в (2.3) достаточно ограничиться этими множествами. Наихудшéние оптимального времени при появлении цели на BC обеспечивается свойствами гарантирующей линии, использованной при построении фокуса и огибающей FPP' (рис. 2, 3), а при появлении на AE — доказывается с помощью прямых оценок (см. [3]). Лемма доказана.

Подчеркнем интересное свойство оптимальных особых траекторий поиска, сохраняющееся и для построенных ниже регулярных траекторий: если целевая точка может появиться лишь на ломаной BC, то полное время процесса при старте из точек огибающей FPP' не зависит от расположения целевой точки, а определяется лишь точкой старта.

Обозначим через L совокупность верхней и нижней огибающей, т. е. ломаную $Q'QFPP'$. Отметим, что благодаря связи (3.2) ломаная $FQQ'\cdot(FPP')$ выпукла вниз (вверх) так же, как $AE(BC)$. Часть плоскости, лежащую справа от L, обозначим через X_L. Любая траектория поиска, начинающаяся в X_L, очевидно, должна выйти на линию L с возможным дальнейшим движением по L. Поэтому минимальное значение функционала следующей вспомогательной задачи оптимального управления

$$\begin{gathered} \dot{x}=u,\ |u| \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant \theta,\ x(0)=x^0 \in X_L, \\ x(\theta) \in L,\ J=\theta+J_*(x(\theta)) \to \min \end{gathered} \tag{3.3}$$

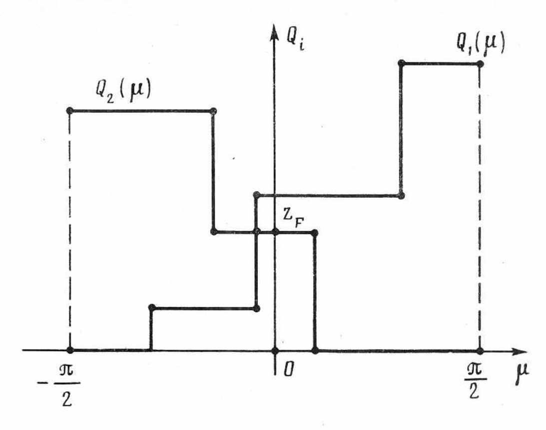


Рис. 4

задает, вообще говоря, оценку снизу для времени (2.3) с начальными значениями $x^0 \in X_L$. Зависимость $J_*(x(\theta))$ в (3.3) — это построенное выше оптимальное гарантированное время (2.3) для точек старта на линии L.

Задача (3.3) может быть решена существующими средствами теории оптимального управления для задач типа Майера [1], либо прямыми геометрическими методами. Оптимальными траекториями задачи (3.3) являются опорные полупрямые к линии L, однозначно заполняющие область X_L в силу указанных свойств выпуклости этой линии (рис. 3). Таким образом, ломаная L является огибающей семейства траекторий, приходящих из области X_L, чем и объясняется название ломаных FQQ', FPP'. Оптимальное значение $J'(x^0)$ функционала задачи (3.3), как уже отмечалось, оценивает снизу время (2.3)

$$J'(x^0) \leqslant J_*(x^0), \ x^0 \in X_L. \tag{3.4}$$

Можно построить оценки (см. [3]), показывающие, что при старте из области X_L наихудшими положениями целевой точки являются ломаные BC, AE, т. е. обнаружение x^1 в любом другом месте области D не приведет к увеличению времени $J'(x^0)$. Таким образом, в (3.4) имеет место равенство, а построенные траектории, стартующие в X_L, являются оптимальными траекториями поиска.

Рассмотрим теперь начальные точки x^0, принадлежащие области $X_0/$ $/(X_L \cup L)$, т. е. лежащие между кривой L и осью ординат (рис. 3). Нетрудно показать, что гарантированное время (2.3) равно расстоянию от точки x^0 до дальней из двух точек границы ∂D, лежащих на общей вертикали с x^0. Оптимальная траектория поиска здесь неединственна. Для точек, лежащих правее фокальной вертикали AB, можно указать следующие два способа оптимального поиска. Первый способ состоит в движении по вертикали до ближайшей огибающей, далее вдоль нее до фокуса F и затем по отрезку FK' (рис. 3). Второй способ состоит в движении в сторону оси ординат вдоль ломаной со звеньями, параллельными звеньям огибающих и отрезку FK'. При неединственности фокальной гарантирующей линии в качестве точки K' для нижней (верхней) части рассматриваемой области следует брать нижний (верхний) конец отрезка, состоящего из точек пересечения определяющих лучей с осью ординат. Два этих способа определяют два направления скорости движения; оптимальным является также любое промежуточное направление скорости. Отметим, что первый способ поиска соответствует наискорейшему уменьшению гарантированного времени поиска, т. е. использует управление, определяемое из условия $\min_u d(J_*(x))/\mathrm{dt}$, где минимум вычисляется по скоростям в пределах указанного угла. Второй способ реализует наискорейшее наблюдение целевой точки.

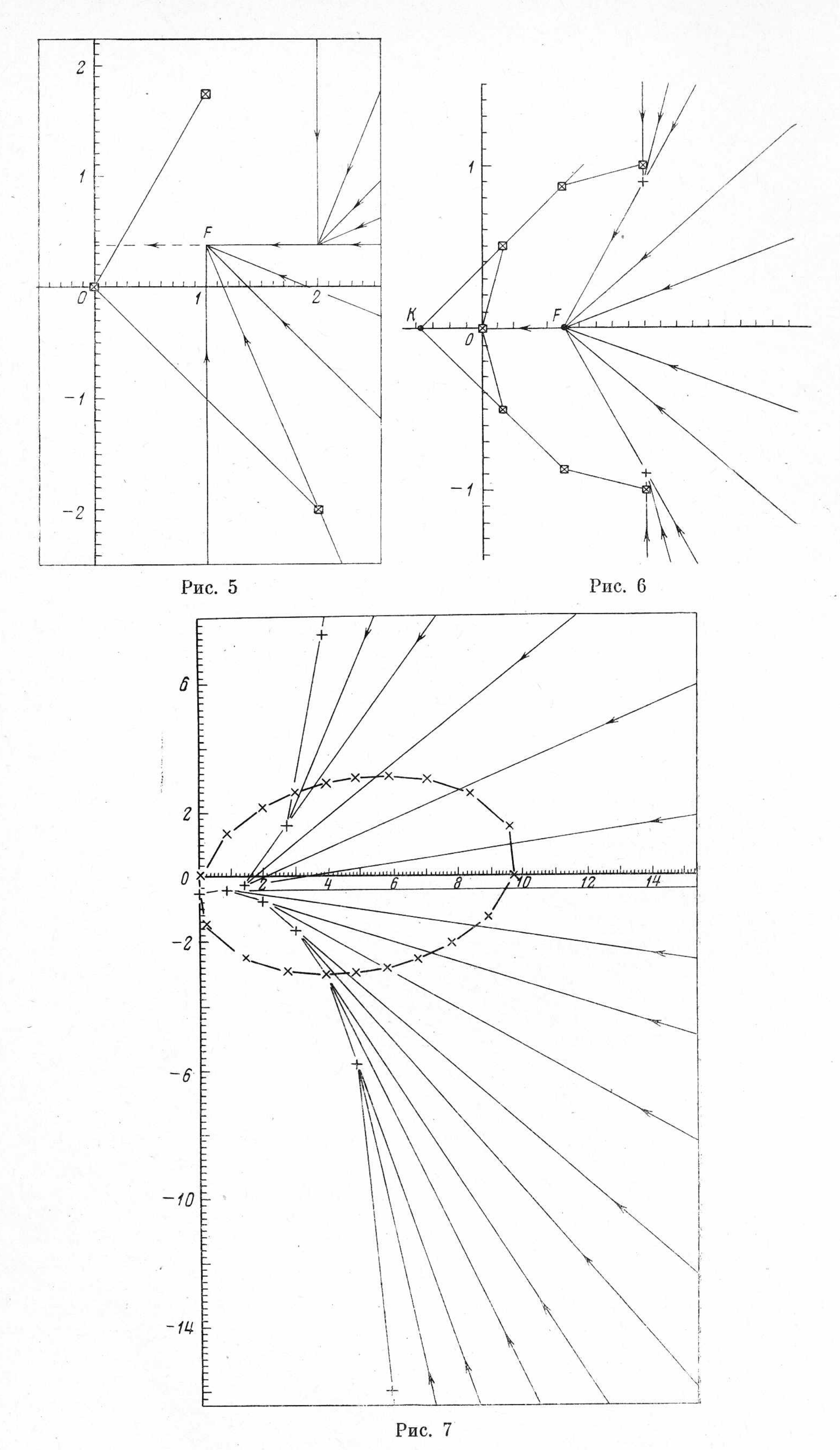


Рис. 5

Рис. 6

Рис. 7

Наконец, если точка x^0 лежит левее вертикали AB, то имеет место аналогичный неоднозначный способ ведения поиска с той лишь разницей, что следует предварительно построить все фокальные гарантирующие линии для «неосвещенной» части области D.

Таким образом, линия L разделяет области с однозначным и неоднозначным способами управлений. На вертикальных участках поведение также неоднозначно. Геометрически линия L напоминает особую траекторию типа универсальной кривой (магистрали), имеющую притоки с обеих сторон; в силу неоднозначности слева от L траектории могут либо «втекать» в L, либо идти параллельно ей.

Отметим, что оптимальное поле траекторий поиска в области X_L, т. е. наиболее существенная часть решения задачи (2.3), (3.1), определяется лишь ломаными BC и AE. Эта часть решения остается без изменений, если заменить область D выпуклой оболочкой этих ломаных или даже их простым объединением. Существенно, однако, что взяты именно непрерывные ломаные; замена области D на конечную совокупность вершин приведет, вообще говоря, к иному решению. Наконец, поле X_L будет одним и тем же для всех выпуклых многоугольников, содержащих на своих границах ломаные BC, AE и лежащих в области, ограниченной горизонтальными лучами, идущими вправо из точек C, E, ломаными BC, AE и любой из фокальных гарантирующих линий.

4. Алгоритм численного построения решения; результаты расчетов. На основе предложенной теории разработан алгоритм построения траекторий оптимального поиска для задачи (3.1) в области X_L. Входными данными алгоритма являются координаты вершин многоугольника D. Алгоритм работает по следующей схеме.

Этап 1, упорядочение вершин. Отыскиваются две ломаные (последовательности вершин многоугольника), идущие от начала координат к самой верхней (нижней) вершине $C(E)$ и содержащие верхнюю (нижнюю) ломаные BC, AE (рис. 3).

Этап 2, построение фокуса. Строятся зависимости $Q_i(\mu)$ и находится интервал (точка) пересечения их графиков (рис. 4), вычисляются координаты точек A, B, F и угловые коэффициенты определяющих лучей фокальных гарантирующих линий.

Этап 3, построение огибающих. С помощью формул (3.2) и верхней (нижней) ломаной вычисляются координаты вершин нижней (верхней) огибающей. Совокупность опорных полупрямых этих огибающих задает искомое поле траекторий поиска в области X_L.

Этап 4, графическая выдача результатов расчета. Для каждой вершины ломаной L вычисляются угловые коэффициенты небольшого числа (одной-трех) траекторий поиска, приходящих в эту вершину. Выдача предусматривает изображение границы области D, огибающих и совокупности траекторий.

Таким образом, выходными данными алгоритма является достаточно плотная совокупность траекторий поиска. Важной задачей для практического применения данной методики является построение синтеза оптимального управления, т. е. отыскания по заданной начальной точке $x^0 \in X_L$ оптимального направления движения. По существу достаточно указать ту из вершин ломаной L, куда следует двигаться по прямой из точки x^0. Разработана модификация алгоритма, решающая задачу синтеза. Этап 4 в этом случае заменяется этапом отыскания упомянутой вершины ломаной L, причем графическая выдача включает в себя также искомую траекторию.

Алгоритм реализован в программе, написанной на языке фортран. На рис. 5, 6, 7 показаны результаты расчетов для случаев, когда область D является треугольником, двенадцатиугольником и многоугольником, приближающим эллипс

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. *Меликян А. А.* Минимаксная задача управления при неполной информации о положении целевой точки // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 2.
3. *Меликян А. А.* Задача оптимального быстродействия с поиском целевой точки // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1.
4. *Черноусько Ф. Л.* Управляемый поиск подвижного объекта // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1.
5. *Петросян Л. А., Зенкевич Н. А.* Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987.

Москва

Поступила в редакцию
20.V.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УДК 62-50

В. Ю. ТЕРТЫЧНЫЙ

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В УСЛОВИЯХ НЕИЗВЕСТНОГО ДРЕЙФА

Предложен метод оценивания вектора неизвестных параметров в задаче адаптивной стабилизации управляемой динамической системы. В основу метода положена известная процедура обращения матриц по Муру-Пенроузу. В качестве приложения полученных результатов рассмотрена задача управления вращательным движением лентопротяжного механизма.

Введение. Настоящая работа посвящена исследованию весьма важного и наименее изученного случая в теории адаптивного управления, когда вектор неизвестных параметров объекта представляет собой некоторую вектор-функцию времени [1–5]. Отдельные фрагменты решения этой задачи, основанные в той или иной степени на использовании аппарата функций Ляпунова, можно найти в [6–11]. Наибольшие сложности, которые возникают здесь при формировании сходящихся алгоритмов оценивания, состоят в доказательстве монотонного убывания функции Ляпунова на траекториях управляемого процесса. Автором предложен метод решения задачи оценивания в условиях неизвестного дрейфа параметров, позволяющий избежать упомянутые трудности; способ решения, в основе которого лежит известный матричный метод псевдообращения, является естественным продолжением развитых в [11, 12] процедур сравнения. В статье нашли отражение вопросы адаптивной последовательной фильтрации части, касающейся асимптотической сходимости, а также некоторые результаты численного моделирования управляемого вращательного движения лентопротяжного механизма.

1. Постановка задачи. Рассматривается управляемая нелинейная динамическая система, движение которой описывается уравнениями Лагранжа 2-го рода следующего вида:

$$A(q,\tau)\ddot{q}+B(q,\dot{q},\tau)=u, \tag{1.1}$$

где $q(t)$, $u(t)\in R^n$ — векторы обобщенных координат объекта и управления для него соответственно; $A(q,\tau)$ — квадратная положительно определенная матрица кинетической энергии; $B(q,\dot{q},\tau)$ — векторная квадратичная форма обобщенных скоростей. Предполагается, что $A(q,\tau)$ $B(q,\dot{q},\tau)$ зависят линейно от вектора неизвестных параметров $\tau(t)$, где $\tau(t)\in R_1$, $\dot{\tau}(t)\in R_2$; R_1, R_2 — ограниченные замкнутые множества: R_1, $R_2\subset R^m$ (в качестве τ_i, $i=1, 2, \ldots, m$ могут рассматриваться такие изменяющиеся во времени характеристики, как массы, моменты инерции, линейные размеры объекта и т. д. в уравнениях (1.1), описывающих широкий класс робототехнических, гироскопических и иных твердотельных систем). Требование линейной зависимости не является слишком ограничительным. Нелинейный случай путем переобозначения сводится к линейному; исходная нелинейная функция параметра предполагается при этом взаимно однозначной для существования обратного преобразования.

Относительно характера изменения $\tau(t)$: считается, что непрерывный достаточно гладкий дрейф происходит без каких-либо ударных или реак-

тивных эффектов. Известно [13, 14], что тогда уравнение движения системы формально ничем не отличается от уравнения, где параметры постоянны; следует только иметь в виду, что $\tau=\tau(t)$. Далее, будем различать между собой два случая изменения вектора $\tau(t)$. В первом из них предполагается неизвестной зависимость $\tau(t)$ от времени. Назовем его неизвестным дрейфом параметров в отличие от известного дрейфа, когда считается известной зависимость $\tau(t)$ от времени и от неизвестных постоянных коэффициентов. Очевидно, что второй случай целиком укладывается в схему оценивания, где неизвестные параметры постоянны [2].

Поставим задачу оценивания параметров для неизвестного дрейфа в терминах адаптивной стабилизации задачи: требуется в (1.1) сформировать *а*) адаптивное управление $u=u(q(t), \dot{q}(t), q_p(\cdot), \bar{\tau}(t))$, $\|u(q, \dot{q}, q_p, \bar{\tau}\|<C$, где C — заданная постоянная; $\bar{\tau}(t)\in R^m$ — вектор оцениваемых (настраиваемых) параметров, и *б*) алгоритм для нахождения $\dot{\bar{\tau}}:\dot{\bar{\tau}}=\dot{\bar{\tau}}(q(t), \dot{q}(t), q_p(\cdot), \bar{\tau}(t))$ таким образом, чтобы с течением времени выполнялись покомпонентно предельные соотношения

$$q(t)\to q_p(t),\ \bar{\tau}(t)\to\tau(t)\ \ (t\to\infty), \tag{1.2}$$

где $q_p(t)$ — программное движение системы, заданное на всем временном интервале. Для прикладных задач удобно вместо условий (1.2) взять целевые условия

$$\|q(t)-q_p(t)\|<\delta_1,\ \|\bar{\tau}(t)-\tau(t)\|<\delta_2, \tag{1.3}$$

где δ_1, δ_2 — положительные постоянные, задающие точность отслеживания на конечном отрезке времени $t\in[0, T]$; $\|x\|$ — евклидова норма вектора x.

Предлагаемый вниманию метод решения задачи адаптивной стабилизации в условиях неизвестного дрейфа параметров обладает рядом преимуществ по сравнению с традиционными способами решения, а именно выбор и обоснование сходящихся процедур оценивания и управления осуществляется без привлечения аппарата функций Ляпунова. Полученная в работе схема оценивания вполне пригодна для практической цифровой обработки, в чем убеждают результаты проведенного машинного эксперимента.

2. Метод матричного псевдообращения. Преобразуем уравнение (1.1). Для этого воспользуемся тем, что векторы $A(q, \tau)\ddot{q}$ и $B(q, \dot{q}, \tau)$ линейно зависят от τ. Имеем

$$G(q, \dot{q}, \ddot{q})\tau=u, \tag{2.1}$$

где функциональная матрица $G(q, \dot{q}, \ddot{q})$ размерности $n\times m$ линейно зависит от $\ddot{q}$; $G(q, \dot{q}, \ddot{q})=G_1(q, \ddot{q})+G_1(q_1, \dot{q})$;

$$G_1(q, \ddot{q})=\{G_1(q, \ddot{q})\}_{ij}=\partial[A(q, \tau)\ddot{q}]_i/\partial\tau_j;$$
$$G_2(q, \dot{q})=\{G_2(q, \dot{q})\}_{ij}=\partial[B(q, \dot{q}, \tau)]_i/\partial\tau_j;$$
$$i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m.$$

Если в уравнении (2.1) выбрать управление вида [15, 16]

$$u=G(q, \dot{q}, q_*)\bar{\tau}, \tag{2.2}$$

где $\bar{\tau}(t)$ — вектор настраиваемых параметров τ; $G(q, \dot{q}, q_*)=G_1(q, q_*)+$ $+G_2(q, \dot{q})$; $q_*(t)=\ddot{q}_p(t)-\alpha(\dot{q}(t)-\dot{q}_p(t))-\beta(q(t)-q_p(t))$; α, β — любые заданные положительные числа, то, подставляя (2.2) в (2.1), получим при $\bar{\tau}(t)\equiv\tau(t)$, что $q(t)\to q_p(t)$ при $t\to\infty$. В действительности же, условие $\bar{\tau}(t)\equiv\tau(t)$ не выполняется и поэтому в уравнениях (2.1), (2.2) необходимо выбирать алгоритм для нахождения $\bar{\tau}(t)$, при котором соотношения

(1.2) будут иметь место. При подстановке (2.2) в (2.1) получим уравнение

$$G\tau = G_*\bar{\tau}, \qquad (2.3)$$

где $G=G(q, \dot{q}, \ddot{q})$, $G_*=G(q, \dot{q}, q_*)$. Разрешим уравнение (2.3) относительно вектора τ. Очевидно, что за счет алгебраической избыточности в прямоугольной системе (2.3) эта задача неоднозначно разрешима по τ (хотя имеется вполне конкретное единственное, но неизвестное значение τ!). Чтобы снять это несоответствие, будем предполагать, что квадратная матрица $\Phi=G^*G(m\times m)$ невырождена на множестве $R_q=\{q, \dot{q}, \ddot{q}\}\subset R^{3n}$, т. е. столбцы матрицы G линейно независимы (нулевой вектор составляет ядро G). Тогда известно [17], что система (2.3) имеет единственное решение τ, минимизирующее $\|G_*\bar{\tau}-G\tau\|^2$:

$$\tau = S\bar{\tau}, \qquad (2.4)$$

где $S=G^+G_*$, G^+ — псевдообратная по Муру-Пенроузу матрица, определяемая как

$$G^+ = \lim_{\delta\to 0}(G^*G+\delta^2 I)^{-1}G^* = \Phi^{-1}G^*,$$

I — единичная матрица размерности m (здесь через * обозначена операция транспонирования).

Если в качестве алгоритма оцениваемых параметров выбрать

$$\dot{\bar{\tau}}-\dot{\tau} = -\gamma(\bar{\tau}-\tau), \quad \gamma>0, \qquad (2.5)$$

то, получая из (2.5) решение $\bar{\tau}-\tau=(\bar{\tau}-\tau_0)\exp(-\gamma t)$, $\bar{\tau}_0=\bar{\tau}(0)$, $\tau_0=\tau(0)$, будем иметь $\bar{\tau}(t)\to\tau(t)$ при $t\to\infty$. Покажем теперь, что алгоритм (2.5) обеспечивает выполнение другого целевого соотношения (1.2): $q(t)\to q_p(t)$ при $t\to\infty$. Уравнение движения объекта при управлении (2.2) имеет вид (2.3). В этом уравнении $\|u\|=\|G_*\bar{\tau}\|<C$ по условию, где C — заданная постоянная, т. е. матрица G_* является ограниченной. Подставляя значение $\bar{\tau}$ из (2.5) в (2.3), получим

$$G\tau = G_*\tau + G_*(\bar{\tau}_0-\tau_0)e^{-\gamma t},$$

откуда в силу ограниченности G_*

$$\varphi(t) = G_*(\bar{\tau}_0-\tau_0)e^{-\gamma t}\to 0 \quad (t\to\infty). \qquad (2.6)$$

Из двух последних выражений вытекает равенство

$$[G_1(q, \ddot{q}) - G_2(q, q_*)]\tau = \varphi(t),$$

которое может быть переписано как $A(q, \tau)(\ddot{q}-q_*)=\varphi(t)$. Так как матрица $A(q, \tau)$ положительно определенная, то с учетом предельного соотношения (2.6) имеем $\ddot{q}(t)-q_*(t)\to 0$, а тем самым и $q(t)\to q_p(t)$ при $t\to\infty$.

В алгоритме (2.5) вектор τ неизвестен, поэтому, подставляя вместо τ, $\dot{\tau}$ их значения из (2.4), получим алгоритм оценивания вида

$$(I-S)\dot{\bar{\tau}} = (\dot{S}+\gamma S-\gamma I)\bar{\tau}. \qquad (2.7)$$

Поскольку уравнения (2.5) и (2.7) тождественны друг другу в силу уравнения объекта (2.3), решение (2.7) $\bar{\tau}(t)$ стремится к $\tau(t)$ при $t\to\infty$.

Замечания. *1.* Отметим, что матрица $\Phi=G^*G$ может быть особой при некоторых значениях обобщенных координат, их скоростей и ускорений. Эти значения переменных состояния для каждой конкретной управляемой динамической системы могут быть определены. К примеру, для многостепенного манипулятора, состоящего из последовательно соединенных прямолинейных звеньев, вырождение матрицы G^*G возможно лишь при условии, что все звенья расположены на одной прямой. Такие конфигурации не допустимы и их следует выделять за счет ограничений на переменные состояния. Кроме того, эффективность предлагаемого алгоритма, связанная с вырождением матрицы Φ, может быть снижена за счет плохой чис-

ленной обусловленности. Этот вопрос требует специального рассмотрения и выходит за рамки данной работы.

2. В алгоритме адаптации (2.7) матрица S зависит от $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$ в текущий момент времени t; в матрице $\dot{S}$ к этим вектор-функциям времени добавляется вектор $\dddot{q}(t)$. Ясно, что для функционирования «грубого» алгоритма (2.7) требуется технически сложное аппаратурное обеспечение непрерывного процесса измерения значений указанных вектор-функций времени.

3. Адаптивная фильтрация. С целью устранения последнего ограничения проведем последовательную фильтрацию алгоритма оценивания (2.4), (2.5) [11, 18, 19]. Проинтегрируем уравнение (2.6) с весом $\exp[-\varkappa(t-s)]$, $\varkappa>0$ на промежутке $[0, t]$:

$$\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\tau(s)\,ds=\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}S(s)\,\bar{\tau}(s)\,ds. \tag{3.1}$$

Далее, вводя в рассмотрение вектор-функцию $w(t)$

$$w(t)=\mu e^{-\delta t}+\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\tau(s)\,ds;\quad w(0)=\mu;\quad \delta,\quad \varkappa>0, \tag{3.2}$$

убеждаемся в том, что $w(t)$ (3.2) является решением уравнения устойчивого адаптивного фильтра 1-го порядка:

$$\dot{w}(t)+\varkappa w(t)=\tau(t)+\mu(\varkappa-\delta)e^{-\delta t} \tag{3.3}$$

В (3.2) μ — постоянный вектор размерности m, выбираемый заранее; δ, $\varkappa$ — заданные положительные числа. В (3.3) вектор неизвестных параметров $\tau(t)$ определяется с помощью соотношения (2.4). Отметим также, что $w(t)$ в (3.2) согласно (3.1) зависит от $q(t)$, $\dot{q}(t)$ и не зависит от $\ddot{q}(t)$.

Сходящийся алгоритм оценивания сформируем подобно (2.5) в виде

$$\dot{\bar{w}}-\dot{w}=-\gamma(\bar{w}-w),\quad \gamma>0, \tag{3.4}$$

где $\bar{w}(t)$ — отфильтрованное (сглаженное) значение $\bar{\tau}(t)$:

$$\bar{w}(t)=\bar{\mu}e^{-\delta t}-\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\bar{\tau}(s)\,ds,\quad \bar{w}(0)=\bar{\mu},$$

$$\dot{\bar{w}}(t)=\bar{\tau}(t)-\varkappa\bar{w}(t)+\bar{\mu}(\varkappa-\delta)e^{-\delta t}. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.2), (3.3), (3.5) в (3.4), получим следующую запись алгоритма (3.4) (где с учетом (2.4), (3.1) будем иметь алгоритм, зависящий от $q(t)$, $\dot{q}(t)$, $\ddot{q}(t)$):

$$\bar{\tau}(t)-\tau(t)=-(\gamma-\delta)(\bar{\mu}-\mu)e^{-\delta t}-(\gamma-\varkappa)\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}(\bar{\tau}(s)-\tau(s))\,ds. \tag{3.6}$$

Нетрудно показать, что при $\lambda=\gamma-\varkappa>0$ этот алгоритм оценивания сходящийся.

При подстановке в (3.6) соотношений (2.4), (3.1) получим следующее выражение для сходящегося алгоритма адаптации:

$$(I-S(t))\,\bar{\tau}(t)=-(\gamma-\varkappa)\int_0^t e^{\varkappa(t-s)}(I-S(s))\,\bar{\tau}(s)\,ds-(\gamma-\delta)(\bar{\mu}-\mu)e^{-\delta t}.$$

Для того чтобы решить задачу о выборе сходящегося алгоритма оценивания до конца (напомним, что он должен зависить лишь от текущих значений $q(t)$, $\dot{q}(t)$, необходимо, очевидно, отфильтровать значения $w(t)$,

$\bar{w}(t)$. Поступим аналогично тому, как это только что делалось, а именно введем вектор-функцию

$$v(t)=\nu e^{-\xi t}+\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}w(s)\,ds=\nu e^{-\xi t}+\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\left[\mu e^{-\delta s}+\int_0^s e^{-\varkappa(s-r)}\tau(r)\,dr\right]ds,$$

($v(0)=\nu$ – постоянный вектор; $\xi>0$), которая является решением устойчивого фильтра

$$\dot{v}(t)+\varkappa v(t)=\mu e^{-\delta t}+\nu(\varkappa-\xi)e^{-\xi t}+\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\tau(s)\,ds,$$

где $\tau(t)$ определяется посредством (2.4).

Сходящийся алгоритм оценивания выберем в виде

$$\dot{\bar{v}}-\dot{v}=-\gamma(\bar{v}-v),\quad \gamma>0, \tag{3.7}$$

$\bar{v}(t)$ – выход соответствующего фильтра, μ, $\bar{\mu}$, ν, $\bar{\nu}$ – любые заданные векторы размерности m; ξ – любое заданное положительное число. Алгоритм (3.7) в терминах $\bar{\tau}(t)$, $\tau(t)$ переписывается как

$$\begin{gathered}\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}[\bar{\tau}(s)-\tau(s)]\,ds=(\gamma-\varkappa)(\bar{\mu}-\mu)e^{-\varkappa t}/(\varkappa-\delta)-\\ -(\gamma-\delta)(\bar{\mu}-\mu)e^{-\delta t}/(\varkappa-\delta)-(\gamma-\xi)(\bar{\nu}-\nu)e^{-\xi t}-\\ -(\gamma-\varkappa)\int_0^t\int_0^s e^{-\varkappa(t-r)}[\bar{\tau}(\tau)-\tau(r)]\,dr\,ds.\end{gathered} \tag{3.8}$$

В (3.8) входят только значения $q(t)$, $\dot{q}(t)$. С помощью простых преобразований можно установить, что алгоритм (3.8) сходится относительно $\tau(t)$.

Проинтегрируем уравнение (2.4) дважды с весом $\exp[-\varkappa(t-s)]$, $\varkappa>0$, на $[0, t]$:

$$\int_0^t\int_0^s e^{-\varkappa(t-r)}\tau(r)\,dr\,ds=\int_0^t\int_0^s e^{-\varkappa(t-r)}S(r)\bar{\tau}(\tau)\,dr\,ds. \tag{3.9}$$

С использованием (3.1), (3.9) алгоритм (3.8) записывается в виде

$$\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}(I-S(s))\bar{\tau}(s)\,ds=R(t)-\lambda\int_0^t\int_0^s e^{-\varkappa(t-r)}(I-S(r))\bar{\tau}(r)\,dr\,ds. \tag{3.10}$$

На основании изложенной методики использования последовательной адаптивной фильтрации приведем функциональную блок-схему (рис. 1) механизма параметрического оценивания в управляемых динамических системах при наличии дрейфа параметров.

Дадим некоторые пояснения к рис. 1: римскими цифрами I, II, III обозначены блоки оценивания (АО – алгоритм оценивания, АФ – адаптивный фильтр), зависящие от q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$, $\dddot{q}$ в I; q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ в II; q, $\dot{q}$ в III; ЦУ – цель управления; ВНП – вектор неизвестных параметров τ; СВНП – сглаженный вектор неизвестных параметров τ', τ'':

$$\tau'(t)=\int_0^t e^{-\varkappa(t-s)}\tau(s)\,ds,\qquad \tau''(t)=\int_0^t\int_0^s e^{-\varkappa(t-r)}\tau(r)\,dr\,ds,\quad \varkappa>0.$$

Алгоритм оценивания (3.6), (3.8) подобно (2.5) обеспечивают стабилизацию объекта управления относительно программного движения.

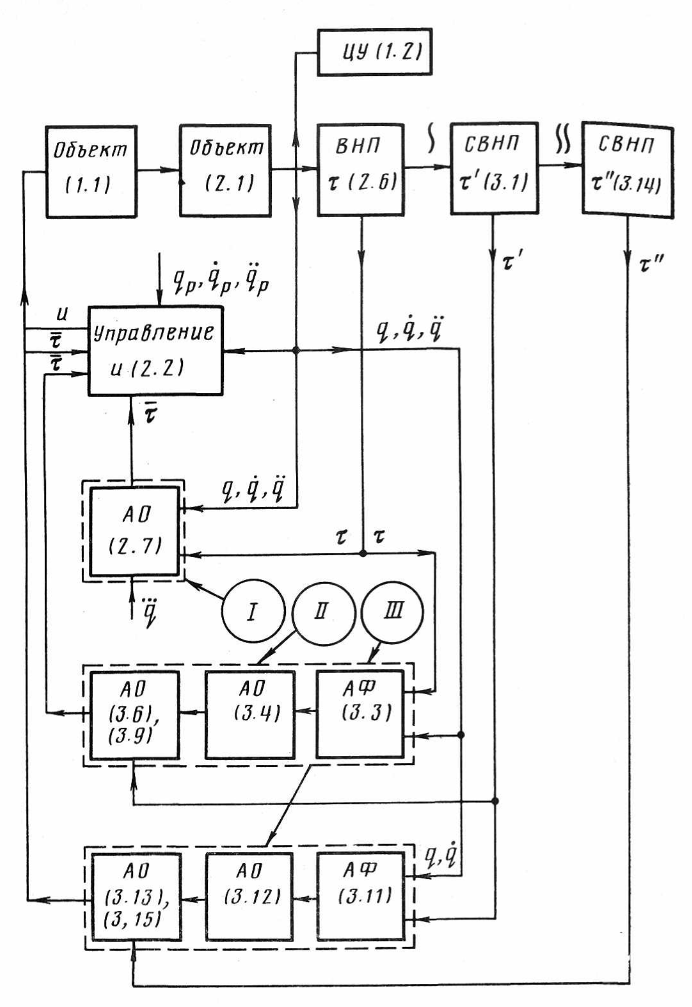


Рис. 1

К примеру, для алгоритма (3.8) при подстановке в уравнение (2.3) его решения $\bar\tau(t)-\tau(t)=\vartheta(t)$, где $\vartheta(t)=(\bar\nu-\nu)(\varkappa-\gamma)^2e^{-\gamma t}-(\bar\nu-\nu)(\varkappa-\xi)^2e^{-\xi t}-$ $-(\bar\mu-\mu)(\varkappa-\delta)e^{-\delta t}$, получим $G\tau=G_*\tau+G_*\vartheta$, откуда в силу ограниченности матрицы G_* и экспоненциального убывания к нулю вектор-функции $\vartheta(t)$ будем иметь $q(t)\to q_p(t)$ при $t\to\infty$.

4. Практическая реализация. Предложенная адаптивная система управления (2.1), (2.2), (3.10) численно моделировалась на ЭВМ ЕС-1045 применительно к изменяющимся неизвестным образом характеристикам лентопротяжного механизма с уравнением движения [20, 21]

$$(I+C\varphi^2+D\varphi^3+E\varphi^4)\ddot\varphi+F\varphi+G=M, \qquad (4.1)$$

где $I=m_0r_0^2/2$, $C=B\rho r_0^2h^2/2\pi$, $D=B\rho r_0h^3/4\pi^2$, $E=B\rho h^4/32\pi^3$, $F=\mathrm{Th}/2\pi$, $G=$ $=Tr_0$, r_0 — радиус вращающегося вокруг неподвижной оси барабана, m_0 — его масса, h, ρ, b — толщина, плотность и ширина ленты соответственно, T — сила натяжения ленты; $0\leqslant\varphi<\infty$ — угол вращения барабана, M — управляемый вращательный момент.

Величины r_0, m_0, h, ρ, T в (4.1) считаются постоянными и заданными, (t) — меняющаяся во времени неизвестная ширина ленты, которая выполняет роль дрейфующего параметра. Цифровое моделирование эффекта «бегущей волны» показало достаточно высокую работоспособность предложенных алгоритмов и соответствие результатов полученным опытным

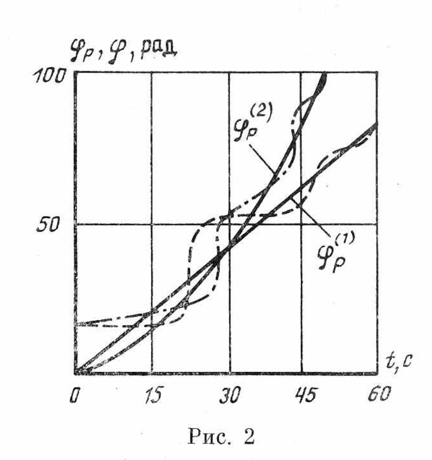


Рис. 2

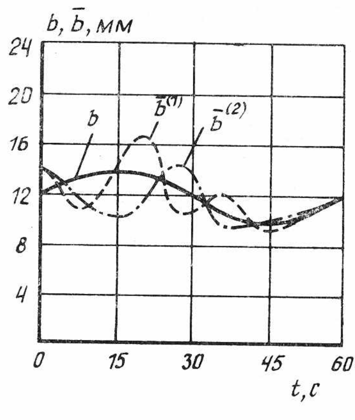


Рис. 3

данным. Эксперименты проводились для следующих параметров и начальных данных:

r_0	13 мм	$\varphi_p^{(1)}kt$, рад·с/с	γ	3
m_0	52	$\varphi_p^{(2)}nt^2$, рад·с²/с²	μ	0 мм·с
h	0.032 мм	δ_1 0.001 рад	$\bar{\mu}$	0 мм·с
ρ	$89\cdot10^{-5}$ г/мм³	α 3	ν	3 мм·с²
T	40 г	β 1	$\bar{\nu}$	2 мм·с²
$\varkappa$	2	δ_2 0.01 мм	ξ	1

Длина ленты принималась равной $257\cdot10^3$ *мм*, ее масса — 91 *г*. Были выбраны два программных режима работы барабана: для $\varphi_p^{(1)}(t)$ при $k=1.5$ *рад/с* и $\varphi_p^{(2)}(t)$ при $n=0.05$ *рад/с²*. Графики зависимостей $\varphi_p(t)$, $\varphi(t)$, $B(t)$, $\bar{B}(t)$ на промежутке времени стабилизации представлены на рис. 2, 3.

Кратко прокомментируем поведение кривых. На рис. 2 барабан с лентой выставляется в начальный момент $t=0$ в позицию $\varphi(0)=10$ рад. Под действием адаптивной системы управления вращением стабилизация барабана по линейной программе достигается на уровне 58 с; по квадратичной — при 50 с. Рисунок 3 отображает процесс изменения во времени оценок $\bar{B}$ ширины ленты B, когда контрольное, но неизвестное для формирования управления M значение B меняется по синусоидальному закону ($B=B_0+B_1\sin B_2t$; $B_0=12$ мм, $B_1=2$ мм $b_2=\pi/30$). Для двух программных движений сходимость процесса оценивания параметра B с заданной точностью δ_2 достигается при 60 *с*. Представленная в работе методика расчета адаптивной обратной связи прошла натурные испытания, которые показали ее в целом надежное и эффективное функционирование в управляемых системах оптико-механического приборостроения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Цыпкин Я. З.* Адаптация и облучение в автоматических системах. М.: Наука, 1968.
2. *Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А.* Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981.
3. *Петров Б. Н., Рутковский В. Ю., Земляков С. Д.* Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. М.: Наука, 1980.
4. *Деревицкий Д. П., Фрадков А. Л.* Прикладная теория дискретных адаптивных систем управления. М.: Наука, 1981.
5. *Фомин В. Н.* Математическая теория обучаемых опознающих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
6. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.
7. *Уткин В. И.* Принципы идентификации на скользящих режимах // ДАН СССР. 1981. Т. 257. № 3.

8. *Андриевский Б. Р., Стоцкий А. А., Фрадков А. Л.* Алгоритм скоростного градиента в задачах управления и адаптации // АиТ. 1988. № 12.
9. *Lindorff D. P., Carrol R. L.* Survey of adaptive control using Lyapunov design // Int. J. Control. 1973. V. 18. № 5.
10. *Landau J. D.* Adaptive control systems. The model reference approach. N. Y.: Dekker, 1979.
11. *Тертычный В. Ю.* Оценивание параметров управляемых динамических систем // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 3.
12. *Тертычный В. Ю.* Алгоритм адаптивного управления градиентного типа в задаче синтеза стабилизирующих регуляторов // Изв. вузов. Приборостроение. 1988. Т. XXXI. № 2.
13. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.
14. *Новоселов В. С.* Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969.
15. *Тертычный В. Ю.* Конечно-сходящийся алгоритм адаптации, обеспечивающий диссипативность системы управления динамическим объектом // Вестн. ЛГУ. 1984. № 13.
16. *Тертычный В. Ю.* Конечная сходимость самонастраивающегося алгоритма адаптации // АиТ. 1985. № 12.
17. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.
18. *Тертычный В. Ю., Фомин В. Н.* Об одном алгоритме адаптивного управления, не требующем вычислении высших производных // Деп. ВИНИТИ 7.08.1980. № 3504–80.
19. *Фомин В. Н.* Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984.
20. *Бессонов А. П.* Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. М.: Наука, 1967.
21. Кинематика, динамика и точность механизмов. Справочник/Под ред. Г. В. Крейнина. М.: Машиностроение, 1984.

Ленинград

Поступила в редакцию
19.IX.1989

после доработки
25.I.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УДК 621.39.11:519.28

В. М. КАРНАУХОВ, А. М. ОНИЩЕНКО

ВЫБОР ПРИЗНАКОВ ПО ЭТАЛОННЫМ ОПИСАНИЯМ НОРМАЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ СОВОКУПНОСТЕЙ

Рассеяние трех признаков внутри класса представлено в виде эллипсоида равной плотности вероятности. Дана методика определения коэффициентов уравнения эллипсоида по результатам экспериментальных измерений признаков в нескольких пробах вещества одного класса, но с изменяющимися неконтролируемыми параметрами. Вероятностной мерой информативности трех признаков является условие внешнего касания эллипсоидов двух смежных классов. Приведено обоснование единственности критерия и дана методика его численного расчета. По результатам исследований и расчетов сделаны важные для практики выводы по комплексированию троек признаков для повышения достоверности распознавания образов.

Введение. Для любых систем распознавания образов, разделяющих образы по решающим функциям, с помощью функций расстояния или правдоподобия, синтаксическими методами или по другим алгоритмам выбор признаков играет центральную роль. Это обусловлено тем, что резко повысить достоверность классификации любой системы можно лишь выбором информативной совокупности признаков. Наибольшее распространение получили системы, распознающие многомерные нормальные совокупности признаков с одинаковыми ковариационными матрицами. Информативные совокупности признаков для таких систем выбирают по критериям расстояний Эвклида или Махаланобиса, по дивергенции Кульбака, по критериям Джеймса — Сю, Беренса — Фишера и др. [1, 2]. Эти критерии малоэффективны для распространенных случаев разделения материалов и веществ по типам и сортам, когда ковариационные матрицы рассеяния признаков в соседних образах существенно отличаются друг от друга. Настоящая статья ставит целью обосновать критерий информативности совокупности трех признаков и изложить методику оценки значения критерия.

1. Рассеивание признаков. Флуктуации признаков x, y и z в соседних образах (сортах) вызваны многими соизмеримыми по влияющему действию причинами и поэтому происходят по нормальному закону с математическими ожиданиями $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ и дисперсиями σ_x^2, σ_y^2 и σ_z^2, а признаки x, y и z оказываются в большей или меньшей степени стохастически связанными друг с другом. Флуктуации в каждом образе происходят в узких диапазонах, и стохастические связи между x, y и z описываются трехмерным нормальным распределением с уравнением эллипсоида рассеяния равной плотности вероятности, которое следуя [3], запишется в виде

$$K_{xx}^{(-1)}(x-\bar{x})^2+2K_{xy}^{(-1)}(x-\bar{x})(y-\bar{y})+2K_{xz}^{(-1)}(x-\bar{x})(z-\bar{z})+$$

$$+2K_{yz}^{(-1)}(y-\bar{y})(z-\bar{z})+K_{yy}^{(-1)}(y-\bar{y})^2+K_{zz}^{(-1)}(z-\bar{z})^2=K^2, \qquad (1.1)$$

где $K_{xx}^{(-1)}$, $K_{xy}^{(-1)}$, $K_{xz}^{(-1)}$, $K_{yz}^{(-1)}$, $K_{yy}^{(-1)}$ и $K_{zz}^{(-1)}$ — элементы матрицы, обратной к матрице (ковариационной) признаков.

При $K=1$ уравнение (1.1) описывает единичный эллипсоид рассеяния признаков с полуосями, равными главным средним квадратическим откло-

нениям признаков по направлениям осей. При разных K из (1.1) получим семейство гомотетичных эллипсоидов с разными вероятностями p рассеяния признаков на них (при $K=1$ $p=0.683$, при $K=2$ $p=0.954$, при $K=3$ $p=0.997$ и т. д. согласно плотности нормального распределения). В общем случае эллипсоиды рассеяния сигналов в смежных образах отличаются друг от друга размером, формой и пространственным положением (см. рис. 1). Уравнение эллипсоида (1.1) однозначно определяется тремя математическими ожиданиями и шестью элементами обратной ковариационной матрицы.

Для определения уравнения (1.1) при постоянном заданном классе вещества отбирают n проб с одинаковым значением контролируемого (распознающего) параметра и с разными (случайными) значениями неконтролируемых параметров и в каждой i-й пробе измеряют значения признаков x_i, y_i и z_i. По измеренным значениям рассчитывают $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ и элементы ковариационной матрицы

$$K_{xx}=\sigma_x^2=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\quad K_{yy}=\sigma_y^2=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2,$$

$$K_{zz}=\sigma_z^2=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\bar{z})^2, \tag{1.2}$$

$$K_{xy}=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}),\quad K_{xz}=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(z_i-\bar{z}),$$

$$K_{yz}=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(z_i-\bar{z})$$

и определитель ковариационной матрицы

$$D=\begin{vmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz} & K_{yz} & K_{zz} \end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

Элементы обратной матрицы рассчитывают по формулам

$$K_{xx}^{(-1)}=(K_{yy}K_{zz}-K_{yz}^2)D^{-1},\quad K_{xy}^{(-1)}=(K_{xz}K_{yz}-K_{xy}K_{zz})D^{-1},$$

$$K_{xz}^{(-1)}=(K_{xy}K_{yz}-K_{xz}K_{yy})D^{-1},\quad K_{yz}^{(-1)}=(K_{xy}K_{xz}-K_{xx}K_{yz})D^{-1},$$

$$K_{yy}^{(-1)}=(K_{xx}K_{zz}-K_{xz}^2)D^{-1},\quad K_{zz}^{(-1)}=(K_{xx}K_{yy}-K_{xy}^2)D^{-1}. \tag{1.4}$$

Подставляя значения элементов из (1.4) в (1.1), раскрывая скобки и группируя члены, получим

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2A_1x+2A_2y+2A_3z+A-K^2=$$
$$=F_1+A-K^2=0, \tag{1.5}$$

где обозначено

$$a_{11}=(K_{yy}K_{zz}-K_{yz}^2)D^{-1},\quad a_{22}=(K_{xx}K_{zz}-K_{xz}^2)D^{-1},\quad a_{33}=(K_{xx}K_{yy}-K_{xy}^2)D^{-1},$$
$$a_{12}=(K_{xz}K_{yz}-K_{xy}K_{zz})D^{-1},\quad a_{13}=(K_{xy}K_{yz}-K_{xz}K_{yy})D^{-1},$$
$$a_{23}=(K_{xy}K_{xz}-K_{xx}K_{yz})D^{-1},\quad A_1=[-\bar{x}(K_{yy}K_{zz}-K_{yz}^2)-$$
$$-y(K_{xz}K_{yz}-K_{xy}K_{zz})-\bar{z}(K_{xy}K_{yz}-K_{xz}K_{yy})]D^{-1},$$
$$A_2=[-\bar{y}(K_{xx}K_{zz}-K_{xz}^2)-\bar{x}(K_{xz}K_{yz}+K_{xy}K_{zz})-\bar{z}(K_{xy}K_{xz}-K_{xx}K_{yz})]D^{-1},$$
$$A_3=[-\bar{x}(K_{xy}K_{yz}-K_{xz}K_{yy})-\bar{y}(K_{xy}K_{xz}-K_{xx}K_{yz})-\bar{z}(K_{xx}K_{yy}-K_{xy}^2)]D^{-1},$$
$$A=[\bar{x}^2(K_{yy}K_{zz}-K_{yz}^2)+2\bar{x}\bar{y}(K_{xz}K_{yz}-K_{xy}K_{zz})+2\bar{x}\bar{z}(K_{xy}K_{yz}-K_{xz}K_{yy})+$$
$$+2\bar{y}\bar{z}(K_{xy}K_{xz}-K_{xx}K_{yz})+\bar{y}^2(K_{xx}K_{zz}-K_{xz}^2)+\bar{z}^2(K_{xx}K_{yy}-K_{xy}^2)]D^{-1}. \tag{1.6}$$

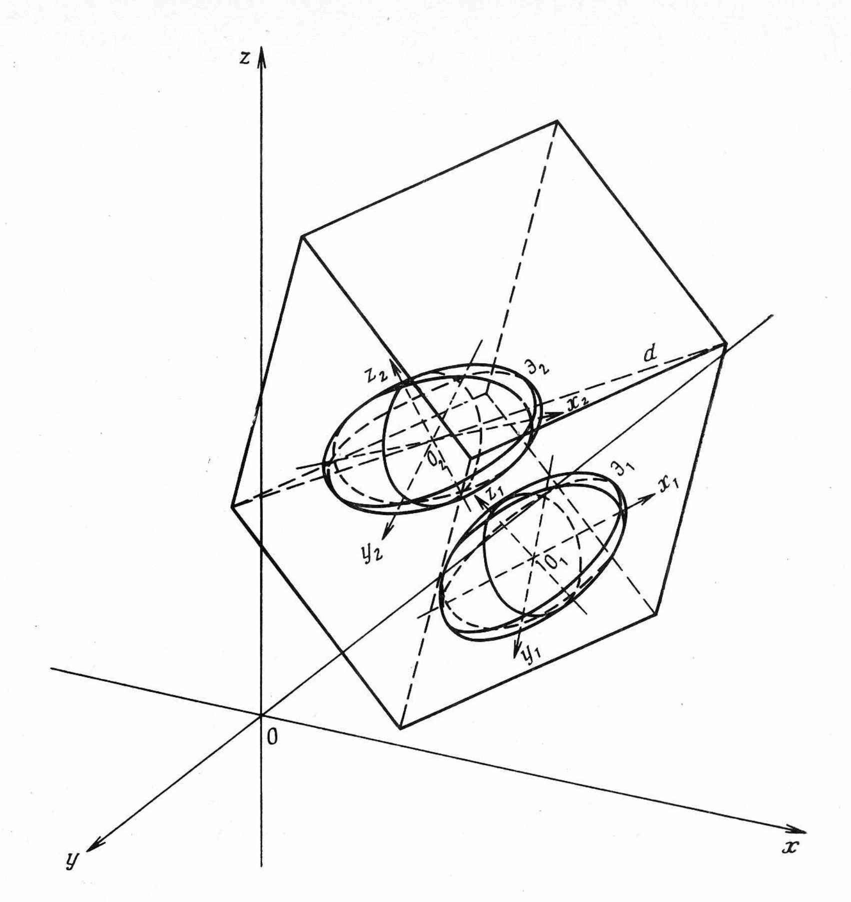


Рис. 1. Эллипсоиды рассеяния равной плотности признаков x, y и z для двух смежных образцов и ограничивающий эллипсоиды параллелепипед

Поступая аналогично, получим подобное (1.6) уравнение эллипсоида для второго класса вещества:

$$b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2+2b_{12}xy+2b_{13}xz+2b_{23}yz+2B_1x+$$
$$+2B_2y+2B_3z+B-K^2=F^2+B-K^2=0. \qquad (1.7)$$

Эллипсоиды по уравнениям (1.5) и (1.7) $Э_1^k$ и $Э_2^k$ показаны на рис. 1. Наиболее распространен случай, когда проекции $Э_1^k$ и $Э_2^k$ на любую из плоскостей $x0y$, $x0z$ или $y0z$ (т. е. соответствующие эллипсы на плоскостях) взаимно пересекаются, т. е. когда ни по одной из пар признаков (x, y), (x, z) или (y, z) нельзя достоверно отличить один класс вещества от другого. Зато вследствие непересечения эллипсоидов $Э_1^k$ и $Э_2^k$ при соответствующем K можно с соответствующей вероятностью отличать классы вещества. Значение K, при последовательных увеличениях которого $Э_1^k$ и $Э_2^k$ начинают снаружи касаться друг друга, является однозначной вероятностной мерой отличения смежных классов вещества. Чем больше K, тем надежнее отличение. Поэтому наименьшая величина K, при которой эллипсоиды (1.5) и (1.7) касаются друг друга, является однозначной вероятностной мерой информативности тройки признаков. Остается оценить значение K для известных уравнений (1.5) и (1.7), т. е. для заданной совокупности тройки признаков.

2. Информативность признаков. Эллипсоиды $Э_1^k$ и $Э_2^k$ внешне касаются в точке M если выполняются: условие пересечения эллипсоидов в точке $M\in Э_1^k \cap Э_2^k$ (внешнего) и условие внешнего касания $\vec{\nabla} F_1(M)=t\vec{\nabla} F_2(M)$

при $t<0$. Пусть множество $S=\{M\in R^3\colon \vec{\nabla}F_1(M)=t\vec{\nabla}F_2(M)$ для некоторого $t<0\}$.

Теорема 1. Множество S представляет собой ограниченную непрерывную кривую

$$\gamma(t)\colon \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t), \quad -\infty<t\leqslant 0, \text{ где} \\ z=z(t), \end{cases}$$

$\gamma(0)=O_1$ — центр эллипсоида $Э_1^k$, $\gamma(-\infty)=O_2$ — центр эллипсоида $Э_2^k$,

$$x(t)=[D(t)]^{-1}\begin{vmatrix} tB_1-A_1 & a_{12}-tb_{12} & a_{13}-tb_{13} \\ tB_2-A_2 & a_{22}-tb_{22} & a_{23}-tb_{23} \\ tB_3-A_3 & a_{23}-tb_{23} & a_{33}-tb_{33} \end{vmatrix},$$

$$y(t)=[D(t)]^{-1}\begin{vmatrix} a_{11}-tb_{11} & tB_1-A_1 & a_{13}-tb_{13} \\ a_{12}-tb_{12} & tB_2-A_2 & a_{23}-tb_{23} \\ a_{13}-tb_{13} & tB_3-A_3 & a_{33}-tb_{33} \end{vmatrix}, \qquad (2.1)$$

$$z(t)=[D(t)]^{-1}\begin{vmatrix} a_{11}-tb_{11} & a_{12}-tb_{12} & tB_1-A_1 \\ a_{12}-tb_{12} & a_{22}-tb_{22} & tB_2-A_2 \\ a_{13}-tb_{13} & a_{23}-tb_{23} & tB_3-A_3 \end{vmatrix},$$

$$D(t)=\begin{vmatrix} a_{11}-tb_{11} & a_{12}-tb_{12} & a_{13}-tb_{13} \\ a_{12}-tb_{12} & a_{22}-tb_{12} & a_{23}-tb_{23} \\ a_{13}-tb_{13} & a_{23}-tb_{23} & a_{33}-tb_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. $D(t)\neq 0$ при $t<0$. Действительно, $D(t)=0\Leftrightarrow \Leftrightarrow|\Lambda|D(t)|\Lambda^{-1}|=0$, где Λ — ортогональная матрица, приводящая матрицу $(b_{ij})_{i,j=1}^{3}$ к диагональному виду [4]. Отсюда $|\Lambda|(a_{ij})-t(b_{ij})|\Lambda^{-1}|=0$ или $|\Lambda(a_{ij})\Lambda^{-1}-t\Lambda(b_{ij})\Lambda^{-1}|=0$, где $|\Lambda(a_{ij})\Lambda^{-1}|=(a_{ij}')$, а

$$t\Lambda(b_{ij})\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{t}{b_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{b_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t}{b_3^2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$D(t)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} a_{11}'-\frac{t}{b_1^2} & a_{12}' & a_{13}' \\ a_{12}' & a_{22}'-\frac{t}{b_2^2} & a_{23}' \\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}'-\frac{t}{b_3^2} \end{vmatrix}.$$

Обозначим определитель в левой части последнего равенства через $D_1(t)$. Тогда $D_1(t)=c_1t^3+c_2t^2+c_3t+c_4$, где $c_1=-(b_1^2b_2^2b_3^2)^{-1}$, $c_2=a_{33}'(b_1^2b_2^2)^{-1}+ +a_{22}'(b_1^2b_3^2)^{-1}+a_{11}'(b_2^2b_3^2)^{-1}$, $c_3=-b_1^{-2}(a_{22}'a_{33}'-a_{23}'^2)-b_2^{-2}(a_{11}'a_{33}'-a_{13}'^2)- -b_3^{-2}(a_{11}'a_{22}'-a_{12}'^2)$, $c_4=a_{11}'a_{22}'a_{33}'+2a_{12}'a_{13}'a_{23}'-a_{13}'^2a_{22}'-a_{11}'a_{23}'^2-a_{33}'a_{12}'^2$. Из свойств матрицы (a_{ij}') следует [5], что $c_1<0$, $c_2>0$, $c_3<0$ и $c_4>0$. Поэтому из анализа $D_1'(t)$ видно, что точки экстремума, если они существуют, имеют одинаковый знак, причем $D_1'(0)<0$. Поскольку $\lim\limits_{t\to+\infty}D_1(t)= =-\infty$, а $\lim\limits_{t\to\infty}D_1(t)=+\infty$, то: если точек экстремума нет, то функция $D_1(t)$

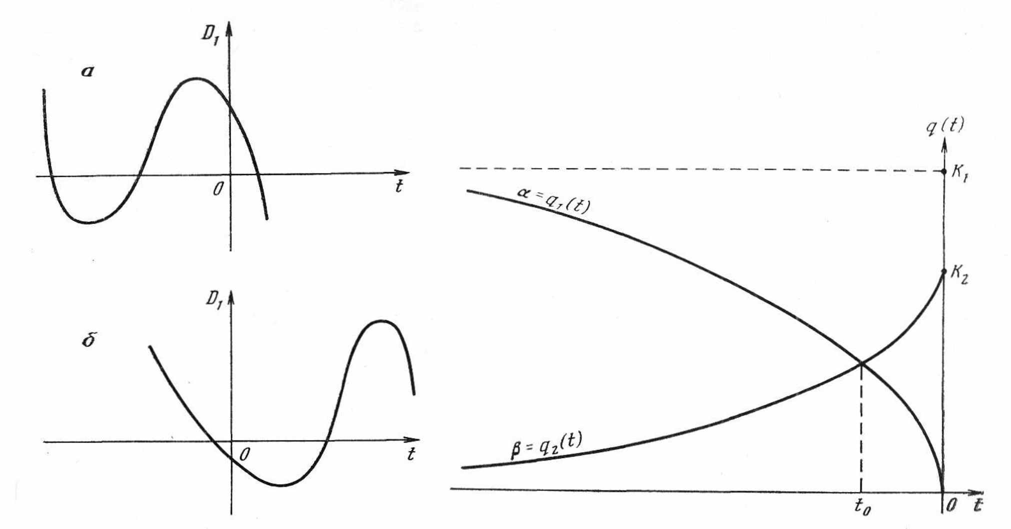


Рис. 2. Зависимости значения определителя D_1 от t

Рис. 3. Зависимости $\alpha = g_1(t)$ и $\beta = g_2(t)$

убывающая и $D_1(t) \neq 0$ при $t \leqslant 0$ (ведь $D_1(0) < 0$); если точки экстремума существуют, то $D_1(t)$ может иметь один из показанных на рис. 2 графиков. График на рис. 2, *а* соответствует случаю, когда две точки экстремума отрицательны, а на рис. 2, *б* — когда положительны. Случай с одной точкой экстремума невозможен, т. к. $D_1'(0) < 0$ и $D_1(t)$ ведет себя однозначно при $t \to +\infty$.

Исследуя $D''(t)$, видим, что для функции $D_1(t)$ существует единственная точка перегиба, соответствующая $t_0 = -{}^1\!/_3 c_2 c_1^{-1}$, $t_0 > 0$. Поэтому точки экстремума для $D_1(t)$ могут быть только положительными. Отсюда $D_1'(t) < 0$ и $D_1(t) \neq 0$ при $t \leqslant 0$.

Зафиксируем $t \leqslant 0$ и найдем решение системы уравнений, возникающей из соотношений $\vec{\nabla} F_1(x, y, z) = t \vec{\nabla} F_2(x, y, z)$. Так как $D(t) \neq 0$ при $t \leqslant 0$, то по правилу Крамера согласно [4] получаем формулы (2.1) для $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

Непрерывность кривой $\gamma(t)$ следует из непрерывности рациональной функции, знаменатель которой отличен от нуля. При $t=0$ получим систему уравнений центра эллипсоида $Э_1^k$. Устремляя t к $-\infty$ в системе $t^{-1} \vec{\nabla} F_1(x, y, z) = \vec{\nabla} F_2(x, y, z)$, получим систему уравнений центра эллипсоида $Э_2^k$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. $M \in S \Leftrightarrow \exists K_1$ и K_2: $Э_1^{k_1}$ и $Э_2^{k_2}$ внешне касаются в точке M.

Доказательство. Пусть $M \in S$. Увеличим $Э_1^{k_1}$ (увеличивая в нем K) чтобы $M \in Э_1^{k_1}$. Увеличим $Э_2^{k_2}$ (увеличивая в нем K) чтобы $M \in Э_2^{k_2}$. Так как $M \in S_1$, то $Э_1$ и $Э_2$ имеют одну и ту же касательную плоскость в точке M и лежат по разные стороны плоскости. Следовательно, $Э_1^{k_1} \cap Э_2^{k_2} = M$.

Пусть $Э_1^{k_1}$ и $Э_2^{k_2}$ внешне касаются в точке M. Тогда верно условие определения внешнего касания и поэтому $M \in S$. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим уравнение

$$F_1(x(t), y(t), z(t)) - F_2(x(t), y(t), z(t)) + A - B = 0. \qquad (2.2)$$

Теорема 3. Решение уравнения (2.2) существует и единственно при $t \leqslant 0$.

Доказательство. Пусть $g_1(t) = F_1(x(t), y(t), z(t)) + A$, а $g_2(t) = F_2(x(t), y(t), z(t)) + B$. Геометрически каждая из этих функций представляет собой квадраты коэффициентов расстояния для $Э_1^{k_1}$ и $Э_2^{k_2}$, такие что $(x(t), y(t), z(t)) \in Э_1^{k_1}$ и $(x(t), y(t), z(t)) \in Э_2^{k_2}$. Покажем, что $g_1(t)$ — непрерывная убывающая функция на $(-\infty, 0]$, причем $g_1(0) = 0$, $\lim\limits_{t \to -\infty} g_1(t) =$

$=K_1>1$. Непрерывность $g_1(t)$ следует из непрерывности $\gamma(t)$. Поскольку $\gamma(0)$ — центр эллипсоидов при разных K, то коэффициент растяжения $K=0$, т. е. $g_1(0)$. Поскольку $\gamma(-\infty)$ — центр эллипсоидов $Э_2^k$, то $g_1(-\infty)=$ $=K_1>1$. Докажем убывание $g_1(t)$. Для этого достаточно доказать (ведь $g_1(0)=0$, $\lim_{t\to-\infty} g(t)=K_1>1$), что если $t_1\neq t_2 \Rightarrow g_1(t_1)\neq g_2(t_2)$. Во-первых, если $t_1\neq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ (в противном случае $\vec{\nabla}F_1(\gamma(t_1))=t_1\vec{\nabla}F_2(\gamma(t_1))$ и $\vec{\nabla}F_1(\gamma(t_1))=t_2\vec{\nabla}F_2(\gamma(t_1))$ и отсюда $\vec{\nabla}F_2(\gamma(t_1))=0$, что для конечного t_1 выполняться не может). Во-вторых, если $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)\Rightarrow g_1(t_1)\neq g_2(t_2)$ (в противном случае эллипсоид $Э_1^{k_1}$ при $K_1=\sqrt{g_1(t_1)}$ пересекает $\gamma(t)$ в двух точках, что не может быть, т. к. $Э_1^{k_1}$ при $K_1=\sqrt{g_1(t_1)}$ касается в двух точках $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ эллипсоидов из семейства $Э_2^k$). Аналогично можно доказать, что $g_2(t)$ — непрерывная возрастающая функция, причем $g_2(0)=K_2>1$, $\lim_{t\to-\infty} g_2(t)=0$. Тогда из поведения графиков функций $\alpha=g_1(t)$ и $\beta=g_2(t)$ (см. рис. 3) видно, что решение уравнения (2.2) существует и оно единственно. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $t_0<0$ — решение уравнения (2.2). Тогда $\gamma(t_0)$ — точка внешнего касания эллипсоидов $Э_1^k$ и $Э_2^k$, где

$$K=\sqrt{F_1(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))+A}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $t_0<0$:

$$F_1(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))-F_2(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))+A-B=0. \tag{2.4}$$

Пусть K определяется из (2.3). Рассмотрим $Э_1^k$ и $Э_2^k$ и точку $M=\gamma(t_0)$. Возводя (2.3) в квадрат, имеем $M\in Э_1^k$. Из соотношения (2.4) следует $M\in Э_2^k$. Поскольку $M\in S$, то M — точка, в которой $Э_1^k$ и $Э_2^k$ внешне касаются. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. $t_0<(d/a)^3$, где d — диагональ прямоугольного параллелепипеда, в котором находятся $Э_1^1$ и $Э_2^1$, a — минимальная из полуосей эллипсоидов $Э_1^1$ и $Э_2^1$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}=\varphi(x)$ — поворот или сдвиг в R^3, $f(M)$ — некоторая дифференцируемая функция в R^3, $\tilde{f}=f_0\varphi^{-1}$. Тогда $|\nabla f(M_0)|=$ $=|\vec{\nabla}\tilde{f}(M_0)|$, т. е. повороты и сдвиги не меняют длины вектора-градиента. Известно, что $\vec{\nabla}\tilde{f}(\varphi(M_0))=J_\varphi\vec{\nabla}f(M_0)$, где J_φ — якобиан преобразования φ. В нашем случае J_φ — ортогональная матрица. Тогда

$$|\vec{\nabla}\tilde{f}(\varphi(M_0))|^2=(\vec{\nabla}\tilde{f}(\varphi(M_0)),\vec{\nabla}\tilde{f}(\varphi(M_0)))=(J_\varphi\vec{\nabla}f(M_0),$$

$$J_\varphi\vec{\nabla}f(M_0))=(\vec{\nabla}f(M_0),J_\varphi{}^*J_\varphi\vec{\nabla}f(M_0))=(\vec{\nabla}f(M_0),\vec{\nabla}f(M_0))=|\vec{\nabla}f(M_0)|^2.$$

Оценим минимальную и максимальную длины векторов-градиентов для $f(x,\ y,\ z)=x^2(ka_1)^{-2}+y^2(ka_2)^{-2}+z^2(ka_3)^{-2}$ для точек $(x,\ y,\ z)$: $f(x,\ y,\ z)=1$; a_1, a_2, a_3 — полуоси эллипсоида $Э_1$, $K\geqslant1$. Очевидно, что $K\leqslant d/a$, $|\vec{\nabla}f(x,\ y,\ z)|=4x^2(Ka_1)^{-4}+4y^2(Ka_2)^{-4}+4z^2(Ka_3)^{-4}\leqslant4(Ka)^{-4}(x^2+y^2+z^2)\leqslant(4d^2(Ka)^{-4}$. Далее, $|\vec{\nabla}f(x,\ y,\ z)|^2\geqslant4a^2(Kd)^{-4}$. Поэтому $|t_0|<|\vec{\nabla}f_1||\vec{\nabla}f_2|^{-1}\leqslant$ $\leqslant d(Ka)^{-2}a^{-1}(Kd)^2=(d/a)^3$. Теорема 5 доказана.

Итак, для того чтобы найти K, нужно найти t_0 (см. теорему 4). t_0 — решение уравнения (2.2), которое можно переписать в виде $g_1(t)-g_2(t)=$ $=0$ или $g(t)=0$, где $g(t)$, как легко видеть, непрерывная убывающая функция. Очевидно, что для нахождения t_0 можно использовать метод биссекций. Пусть точность вычисления t_0 задана и равна ε. Пусть $l\in N$: $l\geqslant\log_2(R/\varepsilon)$, где $R=(d/a)^3$. Тогда можно предложить следующую цепочку арифметических действий для вычисления K: 1) $K'=R/2$; 2 — $\Pi_1=g(K')$; 3 — $K''=K'+\frac{R}{2^2}\operatorname{Sgn}(\Pi_1)$; 4) $\Pi_2=g(K'')$; 5) $K'''=K''+\frac{R}{2^3}\operatorname{Sgn}(\Pi_2),\ldots,$

$2l-1)\ K^l = K^{l-1} + \frac{R}{2^l}\operatorname{Sgn}(\Pi_{l-1}),$ $2l)\ K = \sqrt{f_1(x(K^l), y(K^l), z(K^l))} + A$. Цепочка арифметических действий по вычислению K быстро сходится и легко реализуется на микропроцессоре или любой ЭВМ. Даже для достаточно большого пространства если $d=0.5$, $a=0.01$ при точности 0.001 достаточно взять $l \geqslant 28$. Из таблицы нормального распределения по вычисленному значению K находят вероятность различения p.

Анализ изложенного, подобных рис. 1 графиков и практика расчетов информативности троек сигналов позволили сделать следующие важные для читателя и простые по интерпретации практические выводы.

3. Выбор признаков. *1.* Распространены случаи, когда по одному признаку можно различать смежные состояния вещества с вероятностью 0.6, по двум признакам — с вероятностью 0.9, по трем признакам — с вероятностью 0.996, т. е. когда ошибка различения при переходе от одного к двум и далее к трем признакам снижается от 40 до 10% и далее к 0.4% (или снижается на два порядка и более).

2. Информативность совокупности трех признаков резко увеличивается с увеличением тесноты стохастической связи между признаками, что совпадает с аналогичным выводом для пар признаков [6] и противоположно распространенному подходу предшественников комплексировать некоррелированные признаки для увеличения информативности.

3. Наиболее информативна совокупность трех тесно коррелированных признаков, наибольшие оси эллипсоидов рассеяния которых параллельны, а наименьшие полуоси направлены навстречу друг другу и наоборот, наименее информативна совокупность признаков, наибольшие оси эллипсоидов рассеяния которых лежат на общей прямой (при условии постоянного расстояния между центрами эллипсоидов).

4. Быстро приближенно оценить информативность совокупности трех признаков можно по величине отношения расстояния между центрами эллипсоидов к квадратному корню из суммы квадратов отрезков прямой, соединяющей центры эллипсоидов, находящихся внутри эллипсоидов. Это отношение является оценкой K сверху.

5. При коэффициентах корреляции между признаками $|r| \geqslant 0.7$ комплексирование трех признаков позволяет уменьшить ошибку разделения состояний вещества на два — пять порядков против разделения по одному признаку, причем ошибка резко уменьшается с ростом абсолютного значения коэффициента корреляции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кульбак С.* Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967.
2. *Фукунага К.* Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979.
3. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988.
4. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1988.
5. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1988.
6. *Онищенко А. М.* Методы повышения точности приборов с источниками ионизирующих излучений. М.: Изд-во стандартов, 1987.

Москва

Поступила в редакцию
20.IX.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УДК 62-50

М. Г. КОЛОБОВ

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ В ШУМАХ СОСТОЯНИЯ И ИЗМЕРЕНИЯ

Рассматривается задача оценивания состояния динамической системы при наличии неопределенных составляющих в шумах состояния и измерения. Приводится метод оценивания, использующий канонические разложения этих составляющих. Для «сужения» области априорной неопределенности и снижения вычислительной сложности алгоритма используется адаптивный фильтр с настройкой элементов ковариационных матриц шумов состояния и измерения. Выбор базисных функций в канонических разложениях предлагается производить с использованием метода множественных моделей.

Введение. Многие практические задачи сводятся к оцениванию вектора состояния линейной динамической системы

$$x_k=\Phi_{k,\,k-1}x_{k-1}+\Gamma_{k-1}\xi_{k-1},$$
$$M[\xi_k]=0,\qquad M[\xi_k\xi_j^{\mathrm{T}}]=D_{\xi_k}\delta_{k-j},\tag{0.1}$$
$$M[x_0]=m_0,\qquad M[(x_0-m_0)(x_0-m_0)^{\mathrm{T}}]=P_0$$

по измерениям

$$z_k=H_kx_k+v_k,$$
$$M[v_k]=0,\qquad M[v_kv_j^{\mathrm{T}}]=D_{v_k}\delta_{k-j},\tag{0.2}$$

где x_k, ξ_k, v_k — векторы состояния, шума состояния, шума измерения размера $n\times1$, $l\times1$, $m\times1$; $\Phi_{k,\,k-1}$, Γ_{k-1}, H_k, D_{ξ_k}, D_{v_k}, P_0 — детерминированные матрицы размера $n\times n$, $n\times l$, $m\times n$, $l\times l$, $m\times m$, $n\times n$. Если матрицы $\Phi_{k,\,k-1}$, Γ_{k-1}, H_k, D_{ξ_k}, D_{v_k} известны точно и шумы ξ_k, v_k некоррелированы (в том числе друг с другом), то оптимальные по критерию минимума дисперсии ошибки оценки могут быть найдены с использованием рекуррентного алгоритма фильтрации Калмана [1]. В [2] приводятся обобщения фильтра Калмана для случаев коррелированных между собой и «цветных» шумов состояния и измерения. Для оценивания состояния (0.1) по измерениям (0.2) в условиях неопределенности могут быть использованы минимаксные, минимаксно-стохастические [3] алгоритмы. В [4] описан адаптивный метод, использующий разложение неопределенных составляющих и позволяющий оценить состояние динамической системы при наличии неопределенных элементов $\Delta\Phi_{k,\,k-1}$, ΔH_k в переходной матрице и матрице наблюдения. При определении состояния многих динамических систем шумы ξ_k состояния и v_k измерения не могут быть заданы как случайные процессы с определенными статистическими характеристиками, и более адекватными оказываются их волновые [5] или канонические [6, 7] представления. В связи с этим возникает задача оценивания состояния динамической системы (0.1) по измерениям (0.2) при наличии неопределенных составляющих в шумах состояния и измерения.

1. Постановка задачи. Пусть шумы ξ_k, v_k в (0.1), (0.2) включают в себя стохастические составляющие $\tilde{\xi}_k$, $\tilde{v}_k$ и неопределенные — ξ_k^1, v_k^1: $\xi_k = \tilde{\xi}_k + \xi_k^1$; $v_k = \tilde{v}_k + v_k^1$. Статистические характеристики шумов $\tilde{\xi}_k$, $\tilde{v}_k$ имеют вид

$$\begin{aligned} &M[\tilde{\xi}_k]=0, \quad M[\tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_j^T] = D_{\xi_k} \delta_{k-j}, \\ &M[\tilde{v}_k]=0, \quad M[\tilde{v}_k \tilde{v}_j^T] = D_{v_k} \delta_{k-j}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

На практике распространен подход, при котором составляющие ξ_k^1, v_k^1 представляются «эквивалентными» некоррелированными шумами ξ_k^{1*}, v_k^{1*}, с использованием известных методов [8—10] адаптивно настраиваются элементы их ковариационных матриц $D^*_{\xi_k^1}, D^*_{v_k^1}$, и в процедуре оценивания используются ковариационные матрицы шумов вида $D_{\xi_k} + D^*_{\xi_k^1}$, $D_{v_k} + D^*_{v_k^1}$. Поскольку при этом заведомо коррелированные составляющие шумов представляются в виде некоррелированных случайных процессов, степень «загрубления» алгоритма оказывается значительной и точность не удовлетворяет требованиям многих задач.

Представим ξ_k^1, v_k^1 в виде разложений вида

$$\begin{aligned} &\xi_k^1 = \left[\sum_{j=1}^{M} a_{1j_k} f^{\xi}_{1j_k} \dots \sum_{j=1}^{M} a_{lj_k} f^{\xi}_{lj_k} \right]^T \ (l, 1), \\ &v_k^1 = \left[\sum_{i=1}^{L} b_{1i_k} f^{v}_{1i_k} \dots \sum_{i=1}^{L} b_{mi_k} f^{v}_{mi_k} \right]^T \ (m, 1), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\{f^{\xi}_{sg_k}\}_{s=\overline{1,l};\ g=\overline{1,M}}$, $\{f^{v}_{pq_k}\}_{p=\overline{1,m};\ q=\overline{1,L}}$ — известные функции, выбираемые исходя из априорных данных о возмущениях ξ_k^1, v_k^1. Предполагается, что величины $\{a_{sr_k}\}_{s=\overline{1,l};\ g=\overline{1,M}}$, $\{b_{l\,q_k}\}_{p=\overline{1,m};\ q=\overline{1,L}}$ меняются медленнее, чем могут быть определены их оценки, что позволяет описать их динамику в виде

$$a_{sg_k} = a_{sg_{k-1}}, \quad b_{pq_k} = b_{pq_{k-1}}. \tag{1.3}$$

Рассмотрим алгоритм оценивания состояния динамической системы (0.1) по измерениям (0.2), использующий разложения (1.2) неопределенных составляющих шумов состояния и измерения.

2. Задача оценивания состояния при наличии неопределенных составляющих в шумах состояния и измерения. Введем расширенный вектор состояния размерности $(n+Ml+Lm)$

$$\tilde{x}_k = [x_k^T \,\vdots\, a_{11_k} \dots a_{1M_k} \dots a_{l1_k} \dots a_{lM_k} b_{11_k} \dots b_{1L_k} \dots b_{m1_k} \dots b_{mL_k}]^T. \tag{1.4}$$

Тогда с учетом (1.2), (1.3) уравнения (0.1), (0.2) для вектора (1.4) могут быть записаны в виде:

$$\tilde{x}_k = \tilde{\Phi}_{k,\,k-1} \tilde{x}_{k-1} + \tilde{\Gamma}_{k-1} \xi_{k-1},$$

$$\tilde{m}_0 = M[\tilde{x}_0] = [m^T_{0(1,\,n)} \,\vdots\, O_{(1,\,Ml+Lm)}]^T,$$

$$\tilde{P}_0 = M[(\tilde{x}_0 - \tilde{m}_0)(\tilde{x}_0 - \tilde{m}_0)^T] = \left[\begin{array}{c|c|c} P_{0(n,n)} & \multicolumn{2}{c}{O_{(n,\,Ml+Lm)}} \\ \hline O_{(Ml,\,n)} & P^a_{0(Ml,\,Ml)} & O_{(Ml,\,Lm)} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O_{(Lm,\,n+Ml)}} & P^b_{0(Lm,\,Lm)} \end{array} \right], \tag{1.5}$$

$$z_k = \tilde{H}_k \tilde{x}_k + \tilde{v}_k, \tag{1.6}$$

где P_0^a, P_0^b — соответственно (lM, lM), (mL, mL)-мерные ковариационные матрицы ошибок определения векторов $a=[a_{11}\dots a_{1M}\dots a_{l1}\dots a_{lM}]^{\mathrm{T}}$ и $b=[b_{11}\dots b_{1L}\dots b_{m1}\dots b_{mL}]^{\mathrm{T}}$ в начальный момент времени. Статистические характеристики шумов $\tilde{\xi}_k$ в (1.5) и $\tilde{v}_k$ в (1.6) описываются выражениями (1.1). Матрицы $\tilde{\Phi}_{k,k-1}$, $\tilde{\Gamma}_{k-1}$ в (1.5) и $\tilde{H}_k$ в (1.6) имеют вид:

$$\tilde{\Phi}_{k,\,k-1}=\left[\begin{array}{c:c:c} \Phi_{k,\,k-1(n,\,n)} & \Gamma_{k-1}\tilde{F}_{(n,\,Ml)} & O_{(n,\,Lm)} \\ \hdashline O_{(Ml,\,n)} & I_{(Ml,\,Ml)} & O_{(Ml,\,Lm)} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{O_{(Lm,\,n+Ml)}} & I_{(Lm,\,Lm)} \end{array}\right],$$

$$\tilde{F}_{(l,\,Ml)}=\begin{bmatrix} f^{\xi}_{1_{k-1}} & & O \\ & \ddots & \\ O & & f^{\xi}_{l_{k-1}} \end{bmatrix},$$

$$f^{\xi}_{1_{k-1}}=[f^{\xi}_{11_{k-1}}\dots f^{\xi}_{1M_{k-1}}],\qquad \dots f^{\xi}_{l_{k-1}}=[f^{\xi}_{l1_{k-1}}\dots f^{\xi}_{lM_{k-1}}],$$

$$\tilde{\Gamma}_{k-1}=\left[\begin{array}{c} \Gamma_{k-1(n,\,l)} \\ \hdashline O_{(Ml+Lm,\,l)} \end{array}\right],\quad \tilde{H}_k=[H_{k(m,\,n)} \,\vdots\, O_{(m,\,Ml)} \,\vdots\, \tilde{L}_{k(m,\,Lm)}];\tag{1.7}$$

$$\tilde{L}_k=\begin{bmatrix} f^{v}_{1_k} & & O \\ & \ddots & \\ O & & f^{v}_{m_k} \end{bmatrix},\qquad \begin{array}{c} f^{v}_{1_k}=[f^{v}_{11_k}\ \dots\ f^{v}_{1L_k}], \\ \vdots \\ f^{v}_{m_k}=[f^{v}_{m1_k}\ \dots\ f^{v}_{mL_k}]. \end{array}$$

Для обеспечения возможности оценивания вектора состояния при неполной адекватности гипотезы (1.3), которая всегда имеет место на практике, целесообразно для отражения этой неадекватности ввести в уравнение (1.5) дополнительный некоррелированный шум $\zeta_k=[O_{1,\,n} \,\vdots\, \xi^*_{1_k}\dots\xi^*_{(Ml+Lm)_k}]^T$:

$$\tilde{x}_k=\tilde{\Phi}_{k,\,k-1}\tilde{x}_{k-1}+\tilde{\Gamma}_{k-1}\tilde{\xi}_{k-1}+\zeta_{k-1},\tag{1.8}$$

ковариационная матрица которого, имеющая вид

$$D^*_{\zeta_k}=\left[\begin{array}{c:c} \multicolumn{2}{c}{O_{(n,\,n+Ml+Lm)}} \\ \hdashline O_{(Ml+Lm,\,n)} & Q_{\xi_k^*(Ml+Lm,\,Ml+Lm)} \end{array}\right],$$

может быть оценена с использованием выражения [11]

$$Q_{\xi_k^*}=\frac{1}{N}\sum_{j=k-N+1}^{k}(\bar{C}\hat{\tilde{x}}_j-\bar{C}\hat{\tilde{x}}_{j/j-1})(\bar{C}\hat{\tilde{x}}_j-\bar{C}\hat{\tilde{x}}_{j/j-1})^T,\tag{1.9}$$

где $\bar{C}=[O_{(Ml+Lm,\,n)} \,\vdots\, I_{(Ml+Lm,\,Ml+Lm)}]$; $\hat{\tilde{x}}_j$, $\hat{\tilde{x}}_{j/j-1}$ — апостериорная и априорная оценки вектора $\tilde{x}_j$; N — число точек, характеризующее глубину «памяти» при адаптивном оценивании $D^*_{\zeta_k}$.

Величина N выбирается в зависимости от скорости изменения $\{a_{sg_k}\}$, $\{b_{pq_k}\}$: чем медленнее меняются эти коэффициенты, тем большим может быть выбрано значение N и наоборот. При одновременном наличии возмущений одной и той же структуры в объекте и измерителе возможно невыполнение условий полной наблюдаемости для расширенного вектора состояния (1.4). Реализация алгоритма в виде адаптивной схемы с настройкой элементов ковариационных матриц дополнительных шумов состояния и измерения предотвращает расходимость процесса оценивания и в этом случае, однако при этом не удается достичь существенного повышения точности оценивания по сравнению с подходом, при котором неопределенные составляющие ξ_k^1, v_k^1 представляются «эквивалентными»

некоррелированными шумами ξ_k^{1*}, v_k^{1*}. На практике присутствие возмущений одной и той же структуры в объекте и измерителе определяется сравнением усредненных по времени ковариаций дополнительных шумов состояния и измерения в предлагаемом алгоритме и в соответствующем адаптивном фильтре с настройкой элементов матриц $D^*_{\xi_k^1}, D^*_{v_k^1}$ [8—10]. Незначительная разница в этих ковариациях свидетельствует об отсутствии существенных по величине неопределенных составляющих ξ_k^1, v_k^1 или об отсутствии условий полной наблюдаемости для расширенного вектора состояния. Для повышения точности оценивания состояния в этих условиях может быть использован метод адаптивного оценивания со схемой множественных моделей [4].

Для оценивания вектора состояния (1.8) по измерениям (1.6) в принципе может быть использован $(n+Ml+Lm)$-мерный дискретный фильтр Калмана с настройкой элементов ковариационной матрицы $D^*_{\zeta_k}$ дополнительного шума состояния ζ_k. Однако с учетом того, что динамика a_{sg_k}, b_{pq_k} задана в виде (1.3), оценивание может быть произведено алгебраически эквивалентным декомпозированным алгоритмом оценивания [12] с динамическими блоками размерностей n, $(Ml+Lm)$. Для снижения вычислительной сложности алгоритма целесообразно использовать прием, описанный в [4]. При этом выявляются составляющие шумов состояния и измерения, в которых могут присутствовать значительные неопределенные составляющие; разложения (1.2) вводятся только для этих составляющих, что позволяет существенно понизить размерность вектора (1.4). Для выявления компонент шумов состояния и измерения, в которых могут присутствовать неопределенные составляющие значительной величины, целесообразно параллельно оценивать вектор состояния x_k, используя адаптивный фильтр с настройкой элементов ковариационных матриц $D^*_{\xi_k}, D^*_{v_k}$ шумов состояния и измерения. Возможность присутствия неопределенных составляющих в тех или иных компонентах шумов состояния и измерения может быть выявлена путем анализа диагональных членов матриц $D^*_{\xi_k}$, $D^*_{v_k}$: они могут присутствовать в тех i—x- и j—x-компонентах, для которых:

$$(D^*_{\xi_k})_{ii}/(D_{\xi_k})_{ii}\gg 1; \qquad (D^*_{v_k})_{jj}/(D_{v_k})_{jj}\gg 1.$$

Заметим, что для простоты изложение проводилось для линейной динамической системы, рассмотренный метод оценивания может быть распространен и на нелинейный случай.

3. Выбор базисных функций в разложениях неопределенных составляющих. Точность оценивания состояния динамической системы при наличии неопределенных составляющих в шумах состояния и измерения в значительной мере зависит от того, насколько адекватен выбор базисных функций $\{f^{\xi}_{sg_k}\}$, $\{f^{v}_{pq_k}\}$ в разложениях неопределенностей. При этом в ряде случаев характер неопределенных составляющих ξ_k^1, v_k^1 меняется при функционировании системы, что приводит к необходимости осуществлять их выбор в ходе оценивания вектора состояния x_k.

Пусть имеется N_H гипотез о базисных функциях в разложениях (1.2): $\{f^{\xi}_{sg_k}, f^{v}_{pq_k}\}_i$ $(i=\overline{1, N_H})$. Используем метод множественных моделей [13] для выбора наилучшей гипотезы. Суть метода заключается в том, что для каждой i-й гипотезы I_i о базисных функциях синтезируется алгоритм оценивания (1.2)—(1.9) и N_H полученных алгоритмов параллельно обрабатывают измерения z_k. При этом каждый i-й алгоритм формирует свою оценку $\hat{\hat{x}}_k^i$ и соответствующую невязку $\delta_k^i=z_k-\hat{H}_k\hat{\hat{x}}^i_{k/k-1}$ ($\hat{\hat{x}}^i_{k/k-1}$ — априорная оценка состояния i-го алгоритма). Обозначим через Pr_k^i вероятность того, что i-я гипотеза адекватна на k-м измерении. Общее выражение для

Pr_k^i имеет вид

$$\mathrm{Pr}_{k+1}^i = \frac{f(z_{k+1}/I_i, Z_k)}{f(z_{k+1}/Z_k)} \mathrm{Pr}_k^i, \qquad Z_k = \{z_1 \ldots z_k\}. \tag{3.1}$$

Условная плотность распределения в числителе (3.1) нормальна со средним $\tilde{H}_{k+1}\hat{\tilde{x}}^i_{k+1/k}$ и ковариацией $S^i_{k+1} = \tilde{H}_{k+1}\tilde{P}^i_{k+1}\tilde{H}^{\mathrm{T}}_{k+1} + D_{v_k}$ ($\tilde{P}^i_{k+1/k}$ — ковариационная матрица ошибок оценивания $\tilde{x}^i_{k+1/k}$). Обозначим

$$\beta^i_{k+1} = (2\pi)^{-m/2}[\det S^i_{k+1}]^{-1/2}, \quad \omega^i_{k+1} = \delta^{iT}_{k+1}(S^i_{k+1})^{-1} \cdot \delta^i_{k+1}. \tag{3.2}$$

Тогда

$$f(z_{k+1}/Z_k) = \beta^i_{k+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^i_{k+1}\right).$$

Знаменатель в (3.1) запишем в виде

$$f(z_{k+1}/Z_k) = \sum_{j=1}^{N_H} Pr_k^j f(z_{k+1}/I_j, Z_k). \tag{3.3}$$

Подставив (3.2), (3.3) в (3.1), получим рекуррентные соотношения

$$Pr^i_{k+1} = \frac{\beta^i_{k+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^i_{k+1}\right)}{\sum_{j=1}^{N_H} \beta^j_{k+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega^j_{k+1}\right) Pr_k^j} Pr_k^i. \tag{3.4}$$

При начале просчета процедуры (3.4) используются априорные вероятности гипотез Pr_0^i $(i=\overline{1, N_H})$. Если данные, позволяющие отдать преимущество одним базисным функциям по отношению к другим отсутствуют, то все $\mathrm{Pr}_0^i = 1/N_H$.

В результате выбираются базисные функции $\{f^{\xi}_{sg_k}, f^{v}_{pq_k}\}_j$, соответствующие гипотезе I_j, для которой, начиная с некоторого k_0, для $k > k_0$ выполнено $\mathrm{Pr}_k^j > \mathrm{Pr}_k^i$ при всех $i \neq j$ $(i=\overline{1, N_H})$. Для обеспечения возможности выбора базисных функций при меняющемся характере неопределенностей описанная выше процедура циклически перезапускается с начальных условий; при этом подразумевается, что время определения Pr_k^i меньше времени, в течение которого характер неопределенных составляющих не меняется.

Успешное использование предлагаемого метода адаптивного оценивания требует, чтобы введенные гипотезы образовывали полную группу событий, т. е. чтобы среди них нашлась такая, которая представляет собой адекватные аппроксимации неопределенных составляющих в шумах состояния и измерения. При этом условная вероятность адекватной гипотезы превалирует над условными вероятностями других гипотез и тем самым осуществляется выбор адекватной гипотезы. Заметим, что гибкость разложений вида (1.2), обеспечивающая наличие среди группы ограниченного объема адекватной аппроксимации, определяется возможностью адаптивной подстройки коэффициентов a_{sg_k}, b_{pq_k}.

4. Пример. Рассмотренный алгоритм моделировался для скалярной динамической системы

$$y_k = y_{k-1} + \xi_{k-1}, \tag{4.1}$$

$$M[\xi_k] = 0, \quad M[\xi_k \xi_j] = D_{\xi_k} \delta_{k-j}$$

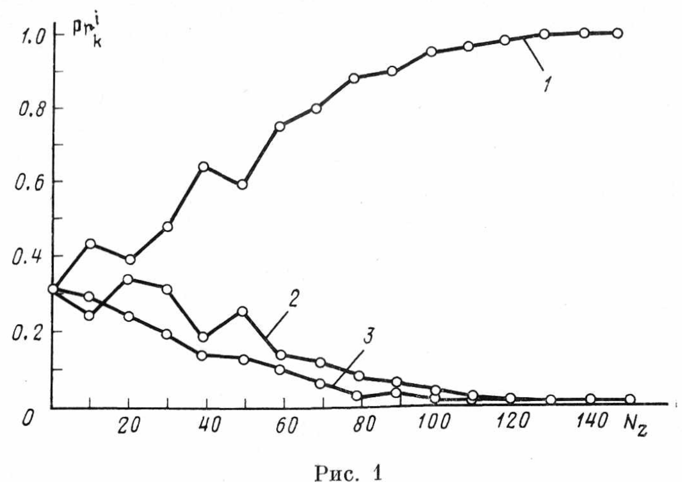


Рис. 1

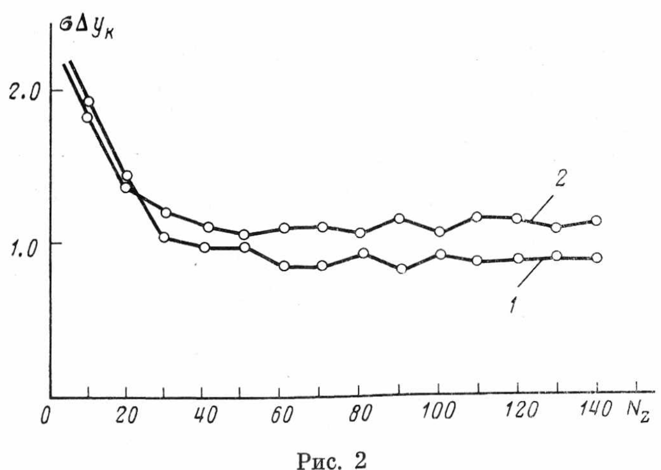


Рис. 2

и измерителя

$$z_k = y_k + \tilde{v}_k + v_k^1, \tag{4.2}$$

$$M[\tilde{v}_k] = 0, \quad M[\tilde{v}_k \tilde{v}_j] = D_{v_k} \delta_{k-j}.$$

Неопределенная составляющая шума измерения v_k^1 моделировалась в виде полигармонического сигнала $\sum_{j=1}^{3} \sin jt$. Интенсивности шумов ξ_k и $\tilde{v}_k$ имели значения $D_{\xi_k} = 0.5$; $D_{v_k} = 0.5$. Рассматривались три вида базисных функций в каноническом разложении неопределенной составляющей v_k^1:

$$I_1 = \{f_{jk}^v\}_1 = \{\sin jt\}_{j=\overline{1,3}}, \tag{4.3}$$

$$I_2 = \{f_{jk}^v\}_2 = \{\sin^j jt\}_{j=\overline{1,3}}, \tag{4.4}$$

$$I_3 = \{f_{jk}^v\}_3 = \{\operatorname{sh} jt\}_{j=\overline{1,3}}. \tag{4.5}$$

Интервал дискретности был выбран равным 0.1 с; значения априорных дисперсий оцениваемых параметров в разложениях — 25.0.

Для реализации процедуры (3.1)—(3.4) выбора базисных функций в разложении неопределенной составляющей v_k^1 параллельно просчитывались три синтезированных для систем (4.1)—(4.3); (4.1), (4.2), (4.4); (4.1), (4.2), (4.5) четырехмерных алгоритма оценивания вида (1.2)—

(1.9). На рис. 1 представлены $\Pr_k^i$ ($i=\overline{1,\ 3}$) в функции числа N_z обработанных измерений. На рис. 2 — определенная по 40 реализациям выборочная оценка $\sigma_{\Delta y_k}$ СКО ошибки оценивания y_k (кривая *1*); для сравнения кривой *2* представлена $\sigma_{\Delta y_k}$ для алгоритма оценивания, в котором наличие v_k^1 в измерении (4.2) отражалось введением «эквивалентного» некоррелированного шума, интенсивность $D^*_{v\,k}$ которого адаптивно оценивается в виде [10]

$$D^*_{v_k}=\frac{1}{N}\sum_{j=k-N+1}^{k}\{(z_j-\hat{y}_j)^2+P_j\},$$

где $\hat{y}_j$, P_j — апостериорная оценка вектора состояния (4.1) и расчетная дисперсия ошибки оценивания.

Анализ результатов статистического моделирования, представленных на рис. 2, показывает, что использование предложенного метода позволяет в рассмотренном примере повысить точность оценивания состояния y_k на ~20% по сравнению с алгоритмом адаптивного оценивания, в котором неопределенная составляющая представляется «эквивалентным» некоррелированным случайным процессом.

Наряду с идеальной ситуацией, когда одна из гипотез точно соответствует характеру неопределенной составляющей, был рассмотрен случай, при котором абсолютно адекватная гипотеза исключена из группы рассматриваемых гипотез, т. е. в группе гипотез были оставлены разложения I_2, I_3. В этом случае процедурой (3.1)—(3.4) была выбрана гипотеза I_2. Число N_z измерений, при котором $\Pr_k^2=0.95$, $\Pr_k^2=0.05$, в этом случае равно 270, а $\sigma_{\Delta y_{270}}=1.05$ (при наличии в группе абсолютно адекватной гипотезы, как видно из рис. 2, $\sigma_{\Delta y_{140}}=0.90$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kalman R. E.* A new approach to linear filtering and prediction problems // Trans. ASME. J. Basic. Eng. 1960. 82D.
2. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М.: Связь, 1976.
3. *Малышев В. В., Красильщиков М. Н., Карлов В. И.* Оптимизация наблюдения и управления летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1989.
4. *Колобов М. Г.* Адаптивное оценивание состояния динамической системы в условиях неопределенности // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 1.
5. *Джонсон С.* Теория регуляторов, приспосабливающихся к возмущениям // Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах/Под ред. Леондеса К. Т. М.: Мир, 1980.
6. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975.
7. *Богуславский И. А.* Робастный алгоритм рекуррентной фильтрации // ДАН СССР. 1988. 300. № 6.
8. *Jazwinski A. H.* Adaptive filtering // Automatica. 1969. 5.
9. *Mehra R. K.* On the identification of variances and adaptive Kalman filtering // IEEE Trans. Automatic Control. 1970. V. AC-15.
10. *Maybeck P. S.* Stochastic Models. Estimation and Control. V. 2. N. Y.: Acad. Press, 1982.
11. *Салычев О. С.* Скалярное оценивание многомерных динамических систем. М.: Машиностроение, 1987.
12. *Friedland B.* Treatment of bias in recursive filtering // IEEE Trans. Automatic Control. 1969. V. AC-14. № 4.
13. *Lainiotis D. G.* Partioning: A unifying framework for adaptive systems, I: Estimation // Proc. IEEE. 1976. V. 64. № 8.

Москва

Поступила в редакцию
28.XI.1989

после доработки
20.II.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УПРАВЛЕНИЕ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

УДК 62-5

М. ВУКОБРАТОВИЧ, Д. СТОКИЧ

ТРЕБУЕТСЯ ЛИ АДАПТИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ МАНИПУЛЯЦИОННЫХ РОБОТОВ, И ЕСЛИ ДА, ТО В КАКОЙ МЕРЕ?

В статье рассматриваются вопросы соотношения между робастным неадаптивным и адаптивным управлениями в применении к манипуляционным роботам (МР). Сравниваются неадаптивное и адаптивное управления манипуляционными роботами для случая, когда параметры робота изменяются и неизвестны заранее. Цель статьи – определение критерия применимости адаптивного управления для МР с переменной нагрузкой. Методом агрегации – декомпозиции исследуется устойчивость робототехнической системы и устанавливается необходимость введения адаптивного управления для стабилизации робототехнической системы. На примере конкретного робота проводится вышеописанное исследование и показывается, в каких случаях требуется введение адаптивного управления.

Введение. Целый ряд уже опубликованных работ посвящен проблеме динамического управления манипуляционными роботами с переменными параметрами. Хорошо известны два основных подхода: робастное неадаптивное управление [1–5] и адаптивное управление [6–10]. За последние несколько лет особенно большое количество исследований было опубликовано по адаптивному управлению роботехническими системами [11, 12]. Найденные в этих работах адаптивные управления решают задачу изменения параметров, т. е. обеспечивают удовлетворительные характеристики робототехнической системы при изменении параметров. С другой стороны, построено значительное количество алгоритмов неадаптивного управления. Эти алгоритмы управления строятся так, чтобы они были достаточно робастными и выдерживали изменение параметров робота. Совершенно очевидно, что неадаптивные законы управления, вообще говоря, более просты в применении, чем адаптивные.

Однако требуется сделать небольшое усилие для того, чтобы установить критерий, когда необходимо применять адаптивное управление, а когда решение задачи возможно путем использования некоторого робастного неадаптивного закона управления. Другими словами, требуется дать ответ на следующий вопрос: необходимо ли адаптивное управление манипуляционным роботом с переменными параметрами или можно получить хорошие результаты, применяя неадаптивные законы управления. Эта проблема уже рассматривалась в статье [13] и монографии [14]. Задача данной работы состоит в том, чтобы установить явный критерий для решения проблемы: есть ли необходимость применять некоторое адаптивное управление (с переменными коэффициентами усиления) или можно использовать робастное управление (с постоянными коэффициентами усиления). Этот критерий будет установлен путем рассмотрения практиче-

ской устойчивости робототехнической системы. Будет использован метод агрегации — декомпозиции для анализа устойчивости робота [1, 2, 14].

Целый ряд параметров робота может изменяться в процессе его функционирования (например, трение в шарнирах, коэффициенты усиления приводов и т. д.). Однако наиболее существенный набор параметров, который может изменяться во время работы манипулятора,— это параметры, связанные с полезной нагрузкой. Изменение параметров нагрузки обычно очень велико, т. е. робот должен переносить различные грузы (или двигаться с ненагруженным схватом). Изменение нагрузки обычно оказывает значительное влияние на характеристики робота. Таким образом, будем ограничиваться рассмотрением лишь параметров нагрузки и считать, что в робототехнической системе изменяются только эти параметры. Вообще говоря, параметры нагрузки заранее неизвестны. Однако для каждого робота можно определить диапазон допустимого изменения параметров нагрузки, т. е. могут быть определены максимальные массы и моменты инерции груза, который должен быть перенесен роботом. Указанная область допустимого изменения параметров нагрузки определяется либо возможностями системы управления, либо жесткостью звеньев робота (т. е. нагрузка не должна приводить к прогибу звеньев робота). Система управления должна выдерживать достаточно большие изменения нагрузки, для чего и применяется адаптивное управление. Идея состоит в том, чтобы сделать систему управления способной выдерживать настолько большие изменения параметров нагрузки, насколько допускает жесткость звеньев. Таким образом, требуется проанализировать, удовлетворяет ли робастное неадаптивное управление указанным условиям. Если ответ положителен, то, как правило, нет необходимости вводить более сложные адаптивные алгоритмы управления. Если же анализ показывает, что нет возможности обеспечить допустимое изменение параметров нагрузки с помощью неадаптивного управления, то необходимо применять некоторый адаптивный закон управления.

Сначала рассмотрим представленную задачу в общем виде, а затем применим разработанный тест к конкретной робототехнической системе.

1. Математическая модель робототехнической системы и задачи управления. Математическая модель робототехнической системы хорошо известна. Динамическая модель механической части робототехнической системы с n степенями свободы описывается следующей системой уравнений [2]:

$$s^{\text{M}}: P_i = H_i(q,\, d)\ddot{q} + h_i(q,\, \dot{q},\, d), \qquad i=1,\, 2, \ldots,\, n, \tag{1.1}$$

где q—n-мерный вектор углов поворота звеньев (или линейных перемещений в случае поступательного шарнира), H_i — n-мерный вектор инерционных параметров робота, h_i — скаляр, представляющий центробежные, кориолисовы и гравитационные моменты (силы) в i-м шарнире, p_i — управляющие моменты (силы) в i-м шарнире, d — l-мерный вектор параметров робота. Как уже отмечалось выше, ограничимся рассмотрением лишь параметров нагрузки. Можно считать, что векторы H_i и скаляры h_i являются линейными функциями параметров нагрузки d:

$$s^{\text{M}}: P_i = (H_i^0(q) + d^{\text{т}} H_i^d(q)\ddot{q} + h_i^0(q,\, \dot{q}) + d^{\text{т}} h_i^d(q,\, \dot{q}), \tag{1.2}$$

где H_i^0-мерный вектор, H_i^d — $l \times n$-матрица, h_0^0 — скаляр и h_0^d — l-мерный вектор. Предположим, что параметры нагрузки принадлежат конечной области D, задаваемой в виде: $D = \{d: 0 < d < d_{\max}\}$, где $d_{\max}$ — l-мерный вектор максимально допустимых значений параметров нагрузки (векторное неравенство считается выполненным для каждого элемента вектора).

Каждый шарнир снабжен отдельным приводом. Модели приводов задаются линейными, не зависящими от времени уравнениями

$$s^i: \dot{x}^i = A^i x^i + b^i u^i + f^i p_i, \qquad i=1,\, 2, \ldots,\, n \tag{1.3}$$

где x^i — n_i-мерный вектор i-го привода, A_i — $n_i \times n$-матрица, b_i, f^i — n_i-мерные векторы, u^i — скалярная входная переменная для i-го привода (с целью упрощения будем рассматривать амплитудную константу вместо входной переменной, см. [14]), p_i — управляющий момент (нагрузка), развиваемый i-приводом, n_i — размерность математической модели i-го привода.

Таким образом, полная модель робота состоит из модели механической части s^{M} (1.2) и моделей приводов s^i (1.3). Вектор состояния полной системы представлен в виде $x=(x^{1\text{т}}, x^{2\text{т}}, \dots, x^{n\text{т}})^{\text{т}}$, порядок полной системы равен $N=\sum_{i=1}^{n} n_i$, вектор входных переменных $u=(u^1, u^2, \dots, u^n)^{\text{т}}$.

Рассматривается следующая задача управления. Заданы номинальные значения всех угловых переменных робота $q^{0i}(t)$. Предположим, что номинальные значения векторов состояния $x^{0i}(t)$ заданы в виде $x^0(t)=(x^{01\text{т}}(t), \dots, x^{0n\text{т}}(t))^{\text{т}}$, $t \in T$, $T=(0, \tau)$, где τ — заданный период времени. Необходимо построить управление, которое обеспечивает практическую устойчивость системы около номинального движения, т. е. такое управление, чтобы $\forall x(0) \in X^I$ и $\forall d \in D$ имело место $x(t, x(0)) \in X^t(t)$, $t \in T$, где $X^I \subset R^N$ — заданная ограниченная область допустимых начальных условий, и $X^t(t) \subset R^N$ — заданная ограниченная область допустимых состояний системы в произвольный момент $t \in T$. Предполагается, что $x^0(0) \in X^I$ и $x^0(t) \in X^t(t)$, $t \in T$. Предположим, что области X^I и $x^t(t)$ заданы в виде:

$$X^I = X_1{}^I X_2{}^I \times \ldots \times X_n{}^I \quad \text{и} \quad X^t(t) = X_1{}^t(t) \times X_2{}^t(t) \times \ldots \times X_i{}^t(t), \quad t \in T,$$

где $X_i{}^I = \{x^i(0) : \|x^i(0) - x^{0i}(0)\| \leqslant \overline{X}_i{}^I\}$, $X_i{}^I > 0$, $X_i{}^t(t) = \{\|x^i(t) - x^{0i}(t)\| \leqslant \overline{X}_i{}^t \exp(-\alpha_i, t)\}$, $X_i{}^t > 0$, $\overline{X}_i{}^t \geqslant \overline{X}_i{}^I$, $\alpha_i \geqslant 0$, $i \in I$. Здесь $\overline{X}_i{}^I$, $\overline{X}_i{}^t$, α_i — действительные положительные числа ($\|\cdot\|$ означает евклидову норму соответствующего вектора).

Поставленная выше задача управления включает в себя все задачи, которые могут быть поставлены в робототехнике на самом нижнем исполнительном уровне управления. Исключение составляют лишь такие задачи, когда робот приходит во взаимодействие с окружающей средой, или когда на робот действуют внешние силы [2]. Например, задача позиционирования робота в различные положения может быть сведена к представленной выше задаче следующим образом: вместо траектории известно заданное положение робота X^0, и робот должен быть переведен из произвольного начального положения $X(0) \in X^I$ в некоторую окрестность $X^t(t)$ конечного положения X^0 (область $X^t(t)$ определяет возможные отклонения от конечного положения).

Поставленная задача управления может быть решена с использованием различных алгоритмов управления. Рассмотрим прежде всего наиболее часто применяемый в робототехнике децентрализованный алгоритм управления. Нагрузка может изменяться внутри заданной конечной области D, но параметры нагрузки неизвестны заранее. Таким образом, могут быть рассмотрены два подхода для децентрализации управления: с помощью робастного неадаптивного управления (с неизменными коэффициентами усиления) и с помощью адаптивного управления. Рассмотрим кратко эти две возможности. Ограничимся лишь простым децентрализованным контроллером.

2. Моделирование децентрализованного контроллера. Моделирование децентрализованного контроллера обычно проводится следующим образом. Математическая модель механической части робототехнической системы (1.2) рассматривается в расщепленной (приближенной) форме

$$\overline{P}_i = (\overline{H}_i{}^0 + d^{\text{т}} \overline{H}_i{}^d) \ddot{q}^i + \overline{h}_i{}^0 + d^{\text{т}} \overline{h}_i{}^d, \quad i=1, 2, \dots, n, \tag{2.1}$$

где $\overline{H}_i{}^0$, $\overline{h}_i{}^0$ — постоянные числа и $\overline{H}_i{}^d$, $\overline{h}_i{}^d$ — векторы. В действительности, числа $\overline{H}_i{}^0$ и $\overline{H}_i{}^d$ — оценки момента инерции механизма относительно осей

i-го шарнира. Момент инерции механизма относительно i-го шарнира является функцией положения (углов) всех шарниров q^j $(j>i)$ и функцией параметров нагрузки d. Здесь эти функции оцениваются константами $\bar{H}_i^0$, $\bar{H}_i^d$. Аналогично константы $\bar{h}_i^0$, $\bar{h}_i^d$ дают оценку гравитационных членов. Модель механизма (2.1) расщеплена на совокупность подсистем, каждая из которых связана с одним шарниром робота. Каждый шарнир снабжен соответствующим приводом, математическая модель которого дается уравнениями (1.3). Модель расщепленной подсистемы получается из уравнений (1.3) и (2.1)

$$\bar{s}^i : \dot{x}^i = \bar{A}_d^i x + \bar{b}_d^i u^i + \bar{f}_d^i (\bar{h}_i^0 + d^{\mathrm{T}} \bar{h}_i^d), \qquad \forall i \in I, \tag{2.2}$$

где $\bar{A}_d^i = T_{d_i}^{-1} A^i$, $\bar{b}_d^i = T_{d_i}^{-1} b^i$, $\bar{f}^i = T_{d_i}^{-1} f^i$, $T_{d_i} = [I_{ni} - f^i (\bar{H}_i^0 + d^{\mathrm{T}} \bar{H}_i^d) T_i]$, T_i — n-мерный вектор преобразования $\dot{q}^i = T_i x^i$. Очевидно, что параметры подсистемы (2.2) являются функциями параметров нагрузки d.

Построим теперь локальный контроллер для подсистемы (5). Эта задача сводится к построению сервосистемы, отслеживающей заданную номинальную траекторию $x^{0i}(t)$. Введем локальную прямую связь для того, чтобы компенсировать изменение ускорений и скоростей при движении вдоль номинальной траектории $x^{0i}(t)$. Локальная прямая связь может быть введена в виде локального номинального управления $u^{0i}(t)$, которое удовлетворяет следующему уравнению [14]:

$$\dot{x}^{0i}(t) = \bar{A}_0^i x^{0i}(t) + \bar{b}_0^i u^{0i}(t) + \bar{f}_0^i \bar{h}_i^0, \qquad \forall i \in I, \tag{2.3}$$

где $\bar{A}_0^i = T_{0i}^{-1} A^i$, $\bar{b}_0^i = T_{0i}^{-1} b^i$, $\bar{f}_0^i = T_{0i}^{-1} f^i$, $T_{0i} = [I_{nj} - f^i \bar{H}_i^0 T_i]$. Действительно, можно вычислить локальное номинальное управление вдоль траектории $x^{0i}(t)$ в предположении, что схват робота не несет груза, т. е. $d=0$. Это делается для того, чтобы избежать перерегулирования, которое могло бы возникнуть, если бы локальная прямая связь вычислялась для $d>0$, а схват робота не нес груза (см. [3]). Рассмотрим теперь математическую модель отклонения подсистемы от номинальной траектории $x^{0i}(t)$ (в случае, когда действует локальное номинальное управление $u^{0i}(t)$). Из (2.2) и (2.3) имеем

$$\Delta \dot{x}^i = \bar{A}_d^i \Delta x^i + \bar{b}_d^i \Delta u^i + \bar{f}_d^i [d^{\mathrm{T}} (\bar{H}_i^d T_i \dot{x}^{0i}(t) + \bar{h}_i^d)], \tag{2.4}$$

где $\Delta x^i = x^i - x^{0i}(t)$ — n-мерный вектор отклонения состояния подсистемы от номинальной траектории $x^{0i}(t)$, $\Delta u^i = u^i - u^{0i}(t)$ — скалярное отклонение входного управления на приводе от локального номинального управления (т. е. это то самое управление, которое должно быть построено для локальной подсистемы).

Локальный контроллер должен стабилизировать подсистему (2.4) относительно номинальной траектории. Его можно строить в форме линейной обратной связи

$$\Delta u^i = -k_i^{\mathrm{T}} \Delta x^i, \tag{2.5}$$

где k_i — n_i-мерный вектор коэффициентов усиления обратной связи. Действительно, требуется выбирать коэффициенты усиления обратной связи k_i так, чтобы локальная подсистема (2.2) становилась практически устойчивой относительно номинальной траектории $x^{0i}(t)$ при действии управлений (2.3), (2.5), т. е. в случае, когда

$$u^i = u^{0i}(t) + \Delta u^i = u^{0i}(t) - k_i^{\mathrm{T}} \Delta x^i. \tag{2.6}$$

Таким образом, если параметры модели подсистемы (2.4) изменяются и неизвестны (так как они являются функциями параметров нагрузки), можно строить как робастное неадаптивное управление (т. е. управление с определенными постоянными коэффициентами усиления k_i), так и адаптивное управление (с переменными коэффициентами усиления, которые изменяются по мере изменения параметров). Очевидно, что при действии

адаптивного управления локальное номинальное управление $u^{0i}(t)$ также будет изменяться в соответствии с изменением нагрузки. Если попытаться построить неадаптивное управление с постоянными коэффициентами обратной связи, то возникает необходимость проверять, является ли достаточно робастным такой контроллер для того, чтобы выдержать все допустимые изменения параметров, т. е. действительно ли подсистема практически устойчива относительно номинальной траектории для допустимых параметров нагрузки $d \in D$. Так как параметры подсистемы (2.4) являются линейными функциями параметров нагрузки d, достаточно проверить, действительно ли подсистема практически устойчива при отсутствии нагрузки ($d=0$) и при максимальной нагрузке. Другими словами, необходимо таким образом выбрать коэффициенты усиления обратной связи, чтобы они делали локальную подсистему устойчивой как при $d=0$, так и при $d=d_{\max}$ (т. е. в случае, когда все параметры достигают максимального значения). Построение такой системы может быть выполнено различными методами. В [15] рассматривается построение робастных локальных сервоконтроллеров в параметрической плоскости.

В процессе построения коэффициентов усиления обратной связи локальных сервоконтроллеров необходимо, чтобы выполнялись следующие требования [3]: а) характеристическая частота сервосистемы ω_i должна быть заметно меньше структурной частоты ω_0 ($\omega_i \leqslant 0.5\omega_0$); б) сервосистема должна быть критически задемпфирована (или передемпфирована), т. е. показатель демпфирования должен быть больше единицы $\xi_i \geqslant 1$ для того, чтобы предотвратить перерегулирование; в) для того чтобы гарантировать практическую устойчивость локальной подсистемы относительно номинальной траектории $x^{0i}(t)$ и достигнуть робастности локального сервоконтроллера по отношению к влиянию взаимодействия P_i между подсистемами, необходимо потребовать, чтобы полюса подсистемы с обратной связью удовлетворяли следующему неравенству:

$$\sigma_j^i \leqslant -\alpha_i^0, \quad j=1, 2, \ldots, n_i, \tag{2.7}$$

где σ_j^i — полюса матрицы $(\bar{A}_d^i - \bar{b}_d^i k_i^{\mathrm{T}})$ подсистемы с обратной связью, а $\alpha_i^0 \geqslant 0$ — требуемая степень устойчивости (которая будет определена в следующем разделе).

Для того чтобы проверить практическую устойчивость локальной подсистемы (2.4) с управлением (2.5), можно использовать метод Михаэля [16]. Можно показать, что локальная подсистема (2.4), (2.5) практически устойчива вдоль $x^{0i}(t)$ относительно (X_i^I, X_i^t, τ), если существуют действительные функции $V_i(t, x^i)$ и $\psi_i(t)$ такие, что

$$\dot{v}_i(t, x^i) < \psi_i(t), \quad \forall x^i \in \tilde{X}_i^t(t), \quad t \in T, \tag{2.8}$$

$$\int_0^t \psi_i(t')\, dt \leqslant v_{im}^{\partial X_i^{t(t)}}(t) - v_{iM}^{\partial X_i^I}(0), t \in T, \tag{2.9}$$

где через $v_{im}^{\partial X_i^{t(t)}}(t)$ обозначен $\min v_i(t, x^i)$ для $x^i \in \partial X_i^t(t)$, через $v_{im}^{\partial X_i^I}(0)$ обозначен $\max v_i(t, x^i)$ для $x^i \in \partial X_i^I$, $\partial X(t)$ обозначает границу соответствующей области, $\tilde{X}_i^t(t) = \{x^i : \|\Delta x^i\| < \bar{X}_i^t \exp(-\alpha_i t), \ \|\Delta x^i\| > \bar{X}_i^I \exp(-\alpha_i t)\}$. В (2.8) через $\dot{v}_i$ обозначена производная по времени функции $v_i(t, x^i)$ вдоль решения подсистемы $\bar{S}^i$ (2.4), (2.5). Условия (2.8), (2.9) являются достаточными условиями практической устойчивости подсистемы $\bar{S}^i$ (но не необходимыми). Если выбрать функцию $v_i(t, x^i)$ в виде

$$v_i(t, x^i) = (\Delta x^{i\mathrm{T}} \hat{H}_i \Delta x^i)^{1/2}, \tag{2.10}$$

где $\hat{H}_i$ — положительно определенная матрица размерности $n_i \times n_i$, удовлетворяющая неравенству

$$\hat{H}_i^{\mathrm{T}}(\bar{A}_d^i - \bar{b}_d^i k_i^{\mathrm{T}}) + (\bar{A}_d^i - \bar{b}_d^i k_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \hat{H}_i \leqslant -2 \min_j |\sigma_j^i| \hat{H}_i, \tag{2.11}$$

то условия (2.8), (2.9) практической устойчивости подсистемы (2.4), (2.5) могут быть представлены в форме

$$-\beta_M{}^i\lambda_m{}^{1/2}(\hat{H}_i)\bar{X}_i{}^I(1-\exp(-\alpha_i t))/\alpha_i+$$
$$+\frac{\lambda_M(\hat{H}_i)}{\lambda_m{}^{1/2}(\hat{H}_i)}\|f_d{}^i\|\theta_i(t,d)\leqslant\lambda_m{}^{1/2}(\hat{H}_i)\bar{X}_i{}^t\exp(-\alpha_i t)-\lambda_M{}^{1/2}(\hat{H}_i)\bar{X}_i{}^I,\quad(2.12)$$
$$t\in T,$$

где $\beta_M{}^i$ обозначаем $\min\limits_j|\sigma_j{}^i|$, λ_m и λ_M — соответственно минимальное и максимальное собственные значения матрицы, а $\theta_i(t, d)>0$ — функция, которая удовлетворяет неравенству

$$d^{\text{T}}\left[\bar{H}_i{}^d\int\limits_0^t T_i\dot{x}^{0i}(t')dt'+\bar{h}_i{}^d t\right]\leqslant\theta_i(t,d),\quad t\in T.\quad(2.13)$$

Функцию $\theta_i(t, d)$ можно записать в виде

$$\theta_i(t,\ d)=|d^{\text{T}}[\bar{H}_i{}^d q^{0i}(t)+\bar{h}_i{}^{d_t}]|,\quad(2.14)$$

поскольку

$$\int\limits_0^t T_i\dot{x}^{0i}(t')dt'\leqslant\dot{q}^{0i}(t).\quad(2.15)$$

Таким образом, если требуется обеспечить практическую устойчивость локальной подсистемы, необходимо проверить условие (2.12). Условие (2.12) следует проверять для различных значений параметров нагрузки $d\in D$. Однако, как было указано выше, поскольку эти параметры входят в модель робототехнической системы линейным образом, достаточно проверить условие (2.12) для двух значений параметров $d=0$ и $d=d_{\max}$. Действительно, цель состоит в том, чтобы определить коэффициенты обратной связи в (2.5), для которых все три выше перечисленных условия выполняются как для $d=0$, так и для $d=d_{\max}$. Вместо условия в) (т. е. вместо (2.13)) следует проверить условие (2.12). Иными словами, с помощью (2.12) можно определить желаемую степень устойчивости $\alpha_i{}^0$, которая гарантировала бы практическую устойчивость подсистемы. Если найдется единственный набор коэффициентов обратной связи, удовлетворяющий всем требованиям при $d=0$ и при $d=d_{\max}$, то подсистему можно сделать устойчивой для всех допустимых изменений параметров нагрузки при неадаптивном управлении.

3. Устойчивость робототехнических систем. До сих пор рассматривался синтез контроллера в форме локальных контроллеров, которые дают устойчивость локальных подсистем (2.2) (привод и «развязанный» шарнир). Теперь необходимо проверить, обеспечат ли эти локальные контроллеры устойчивость полной робототехнической системы и сможет ли неадаптивное управление противостоять изменениям параметров нагрузки, если учитывать полную динамику робота (а не только приближенную развязанную модель (2.1)).

Реальная динамическая модель робота (1.1)—(1.3) является сложной нелинейной системой с перекрестными связями. Необходимо проанализировать, каким образом взаимосвязи между подсистемами (шарнирами) влияют на поведение каждой сервосистемы. В предыдущих работах [12, 17] был представлен анализ устойчивости полной системы при применении локальных сервоконтроллеров (2.6). Очевидно, что взаимосвязи между подсистемами (2.2) могут быть описаны в форме (из (1.2) и (2.1))

$$f^i(P_i-\bar{P}_i)=f^i[P_i{}^0(t,\ d)+\Delta P_i-(\bar{P}_i{}^0(t,\ d)+\Delta\bar{P}_i)],\quad(3.1)$$

где $P_i^0(t)$ обозначают так называемые номинальные моменты приводов, которые соответствуют номинальной траектории $x^0(t)$:

$$P_i^0(t, d)=H_i(q^0(t), d)\,q^0(t)+h_i(q^0(t), q^0(t), d), \quad i=1, 2, \ldots, n. \quad (3.2)$$

$\bar{P}_i^0(t, d)$ обозначают номинальные моменты приводов, соответствующие приближенной модели (2.1)

$$\bar{P}_i^0(t, d)=(\bar{H}_i^0+d^{\tau*}H_i^d)\,\ddot{q}^{0i}(t)+\bar{h}_i^0+d^{\tau}h_i^d, \quad (3.3)$$

где ΔP_i — отклонение реального движущего момента P_i от номинального P_i^0 (т. е. $\Delta P_i(x, d)=P_i-P_i^0$) и $\Delta\bar{P}_i=\bar{P}_i-\bar{P}_i^0$. Введем скалярную функцию $\rho_i'(t)>0$ и вектор-функцию $\rho_i''(t)\geqslant 0$, удовлетворяющие условию

$$\int_0^t |P_i^0(x^0(t'), d)-\bar{P}_0^i(t, d)|\,dt'\leqslant\rho_i'(t)+d^{\tau}\rho_i''(t). \quad (3.4)$$

Поскольку $\lim(\Delta P_i-\Delta\bar{P}_i)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, можно определить скалярные функции $\xi_{ij}(d)\geqslant 0$, которые удовлетворяют следующим неравенствам:

$$(\operatorname{grad} v_i)^{\tau}f^i(\Delta P_i-\Delta\bar{P}_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}(d)\,\|\Delta x^j\|,$$
$$x\in X^t(t), \quad t\in T, \quad i=1, 2, \ldots, n. \quad (3.5)$$

Действительно, функции $\xi_{ij}(d)$ являются оценками связей между подсистемами $\bar{s}^i$. Поскольку ΔP_i и $\Delta\bar{P}_i$ — линейные функции параметров d, функции $\xi_{ij}(d)$ можно выбрать в виде линейных функций, т. е. можно записать

$$\xi_{ij}(d)=\xi_{ij}^0+d^{\tau}\xi_{ij}^d, \quad i, j=1, 2, \ldots, n, \quad (3.6)$$

где $\xi_{ij}^0>0$ — положительные числа, а $\xi_{ij}^d>0$ — постоянные l-мерные векторы (все элементы должны быть положительны).

Используя результаты [14, 17], можно записать следующий критерий практической устойчивости глобальной робототехнической системы в случае, когда применяется децентрализованный контроллер (2.6). Если выполнены неравенства:

$$-\beta_M^i\lambda_m^{1/2}(\hat{H}_i)\bar{x}_i^I(1-\exp(-\alpha_i t))/\alpha_i+$$
$$+\frac{\lambda_M(\hat{H}_i)}{\lambda_m^{1/2}(\hat{H}_i)}\{\|\bar{f}_d^i\|\,|d^{\tau}[\bar{H}_i^d\dot{q}^{0i}(t)+\bar{h}_i^d t]|+\|f^i\|\,|[\rho_i'(t)+d^{\tau}p_i''(t)]|\}+ \quad (3.7)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}(d)\bar{x}_j^t(1-\exp(-\alpha_j t))/\alpha_j\leqslant\lambda_m^{1/2}(\hat{H}_i)\bar{x}_i^t\exp(-\alpha_i t)-\lambda_M^{1/2}(\hat{H}_i)\bar{x}_1^I,$$
$$t\in T, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$

то робототехническая система (1.1)—(1.3) с управлением (2.6) практически устойчива на номинальной траектории $x^0(t)$ по отношению к $(x^I, x^t(t), \ldots)$ для заданного d. Если указанные неравенства справедливы для каждого $d\in D$, то робототехническая система практически устойчива для любого допустимого изменения параметров нагрузки. Вследствие того что параметры нагрузки d линейным образом входят в модель динамики робота и все элементы, связанные с d в (3.7), положительны, достаточно проверить условия (3.7) лишь для двух значений d, т. е. для $d=0$ и $d=d_{\max}$. Если условия (3.7) выполняются как при $d=0$, так и при $d=d_{\max}$, то можно сделать вывод, что устойчивость робототехнической системы обеспечивается простым неадаптивным управлением (2.6) для всех ожидаемых изменений параметров нагрузки.

С другой стороны, приведенные выше условия можно использовать для синтеза децентрализованного управления, которое было бы робастным по отношению к изменениям параметров. Действительно, из (3.7) можно определить степени устойчивости α_i^0 локальных подсистем, которые необходимы для обеспечения устойчивости полной робототехнической системы в случае, когда параметры нагрузки изменяются. Можно найти такие α_i^0, которые необходимы для выполнения условий устойчивости (3.7) для $d=d_{\max}$. Из (3.7) следует:

$$-\alpha_i^0(d=d_{\max})\leqslant\alpha_i\Big\{-\frac{\lambda_M(\hat{H}_i)}{\lambda_m^{1/2}(\hat{H}_i)}[\|\bar{f}_d{}^i\|\,|d_{\max}^{\mathrm{T}}(\bar{H}_i{}^d q^{0i}(t)+\bar{h}_i{}^d t)|+$$

$$+\|f^i\|(\rho_i'(t)d_{\max}^{\mathrm{T}}\rho_i''(t))]-\sum_{j=1}^{n}(\xi_{ij}{}^0+d_{\max}^{\mathrm{T}}\xi_{ij}{}^d)\bar{x}_j{}^t(1-\exp(-\alpha_j t))/\alpha_j+$$

$$+\lambda_m^{1/2}(\hat{H}_i)\bar{x}_i{}^t\exp(-\alpha_i t)-\lambda_M^{1/2}(\hat{H}_i)\bar{x}_i{}^I\}/[\lambda_m^{1/2}(\hat{H}_i)\hat{x}_i{}^I(1-\exp(-\alpha_i t))],$$

$$t\in T,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{3.8}$$

Аналогично можно определить требуемую степень устойчивости α_i^0, которая обеспечивает устойчивость робототехнической системы с пустым схватом ($d=0$):

$$\alpha_i^0(d=0)\leqslant\alpha_i\Big\{-\frac{\lambda_M(\hat{H}_i)}{\lambda_m^{1/2}(\hat{H}_i)}\|f^i\|\rho_i'(t)-\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}{}^0\bar{x}_j{}^t(1-\exp(-\alpha_j t))/\alpha_j+$$

$$+\lambda_m^{1/2}(\hat{H}_i)\bar{x}_i{}^t\exp(-\alpha_i t)-\lambda_M^{1/2}(\hat{H}_i)\bar{x}_i{}^I\Big\}\Big/[\lambda_m^{1/2}(\hat{H}_i)\bar{x}_i{}^I(1-\exp(-\alpha_i t))]. \tag{3.9}$$

Теперь следует вернуться к синтезу локальных контроллеров и определить локальные коэффициенты обратной связи, которые удовлетворяют трем указанным требованиям. В условии в) для достижения желаемой локальной степени устойчивости следует взять вычисленное из (3.8) значение $\alpha_i^0(d=d_{\max})$ и вычисленное из (3.9) значение $\alpha_i^0(d=0)$, зависящие от параметров нагрузки d. Действительно, требуется найти локальные коэффициенты обратной связи, которые удовлетворяют указанному требованию для $d=0$ и $d=d_{\max}$. Если параметры нагрузки изменяются, то полюса матрицы подсистемы с обратной связью $(\bar{A}_d{}^i-\bar{b}_d^{\,i}\,k_i{}^{\mathrm{T}})$ также изменяются, несмотря на то, что коэффициенты обратной связи фиксированы. Этот факт следует из того, что $\bar{A}_d{}^i$ и $\bar{b}_d{}^i$ изменяются с изменением параметров нагрузки d. Таким образом, локальная степень устойчивости i-й подсистемы $\min_j|\sigma_j{}^i|$ также изменяется. Необходимо установить, возможно ли найти локальные коэффициенты обратной связи $k_i{}^j$, для которых условие (2.7) удовлетворяется для $d=0$ и $d=d_{\max}$ (имея в виду, что локальная степень устойчивости изменяется с изменением нагрузки, и требуемая степень устойчивости α_j^0 также изменяется). Синтез такого локального коэффициента обратной связи довольно прост, поскольку выполняется на уровне локальной подсистемы ([15]).

Например, если в приводе используются электродвигатели постоянного тока, то матрицы моделей приводов определяются следующим образом (если $n_i=2$ и $x^i=(q^i,\dot{q}^i)^{\mathrm{T}}$):

$$A^i=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\dfrac{F^i+C_E{}^iC_M^i/r_R{}^i}{J_R{}^i}\end{bmatrix},\quad b^i=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{C_M^i}{J_R{}^ir_R{}^i}\end{bmatrix},\quad f^i=\begin{bmatrix}0\\ -\dfrac{1}{J_R{}^i}\end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

где $C_m{}^i$, $C_E{}^i$ — моментные коэффициенты и коэффициенты противоэлектродвижущей силы соответственно, F^i — коэффициент вязкого трения, $r_R{}^i$ —

сопротивление обмоток ротора, J_h^i — момент инерции ротора. В этом случае легко показать, что соотношение между степенями устойчивости матрицы с обратной связью локальной подсистемы для $d=0$ и $d=d_{\max}$ (с фиксированными коэффициентами обратной связи k_i) имеет вид

$$\min_J |\sigma_j^i(d=0)| \left(= \frac{\min_j |\alpha_j^i(d=d_{\max})| (J_R^i + \overline{H}_i^0 + d_{\max}^{\mathrm{T}} \overline{H}_i^d)^{1/2}}{J_R^i + \overline{H}_i^0} \right(1 - $$

$$- \frac{J_R^i + \overline{H}_i^0}{J_R^i + \overline{H}_i^0 + d_{\max}^{\mathrm{T}} \overline{H}_i^d} \Bigg) \Bigg)^{1/2}. \tag{3.11}$$

Таким образом, можно выбрать локальные коэффициенты обратной связи так, что все три требования будут удовлетворяться для $d=d_{\max}$, где в условии (2.7) положено $\alpha_i^0(d=d_{\max})$, определяемое из (3.8). Затем из (3.11) можно найти степень устойчивости для $d=0$ и проверить условия для $d=0$, где требуемая степень устойчивости α_i^0 определяется из (3.9).

4. Синтез адаптивного управления. Если не удается отыскать локальные коэффициенты обратной связи, которые могли бы стабилизировать робототехническую систему для всех допустимых изменений параметров нагрузки, то следует применить одну из схем адаптивного управления.

Ограничимся рассмотрением простого децентрализованного адаптивного управления. Сохраним такую же структуру обратной связи, как и для рассмотренной выше схемы неадаптивного децентрализованного управления. Предположим, что для каждого шарнира и привода применяется локальный контроллер, в котором коэффициенты в локальном номинальном управлении (2.3) и локальные коэффициенты обратной связи в (2.5) изменяются в соответствии с изменениями нагрузки. Действительно, включим в схему управления блок идентификации параметров нагрузки. Идентификацию параметров нагрузки можно осуществить различными способами. Например, параметры нагрузки можно легко определить путем измерения сил в точках контакта между схватом робота и нагрузкой [10]. С этой целью следует поместить датчики силы в этих точках контакта и посредством измерения сил реакции получить непосредственную информацию о параметрах нагрузки. Используя идентифицированные параметры нагрузки, можно определить локальные коэффициенты обратной связи, которые обеспечат устойчивость локальных подсистем со степенью устойчивости, достаточно «высокой» для стабилизации полной робототехнической системы (т. е. обеспечить выполнение условия (3.7) для определенного значения d). Идентифицированные параметры нагрузки будут использоваться при вычислении локального номинального управления. Действительно, локальные коэффициенты обратной связи можно вычислить заранее, занести их в память и затем, во время функционирования робота, для каждого набора идентифицированных параметров легко определить соответствующие локальные коэффициенты обратной связи.

Представленный выше анализ устойчивости робототехнической системы применим для определения диапазона параметров нагрузки, в котором могут быть использованы постоянные коэффициенты усиления и моменты перехода к новым значениям (т. е. можно определить, сколько различных наборов локальных коэффициентов необходимо запоминать, чтобы покрыть все допустимые изменения параметров нагрузки). Таким образом, указанная процедура позволяет не только ответить на вопрос, необходимо ли применять схему адаптивного управления, но и выяснить, какова «степень адаптации», которую следует реализовать.

5. Пример. Для того чтобы показать эффективность приведенной выше методики, рассматривался следующий пример промышленного манипулятора. Параметры звеньев робота указаны в таблице. Робот имеет че-

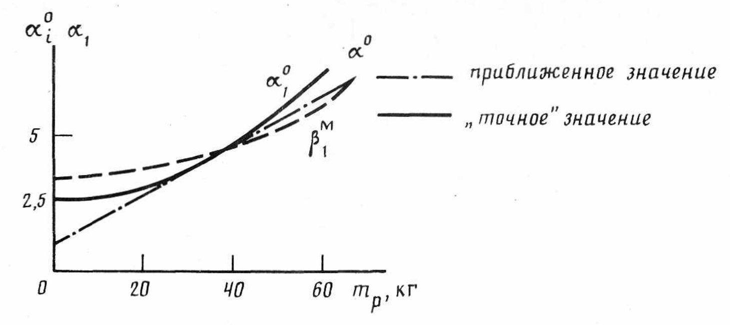


Рис. 1. Изменения номинальной и достигнутой степени устойчивости для подсистемы с $i=1$

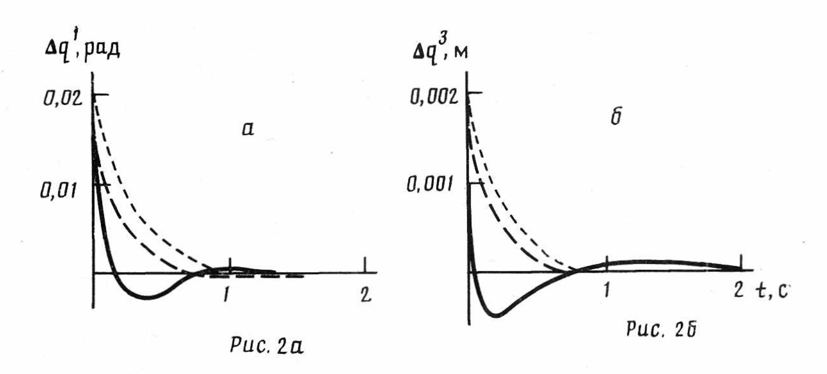


Рис. 2. *а*, *б* – Моделирование движения вдоль траектории при неадаптивном управлении (при изменении нагрузки)

тыре звена и шесть шарниров ($n=6$). Считаем, что шарнир, связанный со схватом, сферический. Шарниры приводятся в движение электродвигателями постоянного тока. Предполагается, что переменной величиной является только масса полезной нагрузки, т. е. $d=\{m_p\}$. Моменты инерции нагрузки принимались пренебрежимо малыми, т. е. нагрузка – точечная масса.

Цель – обеспечение желаемых траекторий шарниров робота для различных нагрузок. Параметры областей практической устойчивости следующие: $\bar{x}_i^I=0{,}002$, $\bar{x}_i^t=0.02$, $\alpha_i=1.5$, $i=1, 2, 4, 5, 6$, $x_3^I=0.01$, $\bar{x}_3^t=0.01$, $\alpha_3=1.5$. Делалась попытка синтезировать децентрализованное неадаптивное управление в форме (2.6). Анализировалась практическая устойчивость робота с локальными контроллерами для различных масс нагрузки. Изменение желаемой степени устойчивости α_i первого шарнира (подсистемы) по отношению к массе нагрузки представлено на рис. 1. Если синтезировать локальный контроллер в этом шарнире так, чтобы степень устойчивости локальной подсистемы удовлетворяла неравенству $\beta_i^M \geqslant 4$

Таблица

Параметры робота

Звено	1	2	3	4
Длина, м	0.7	1.2	2.4	0.97
Масса, кг	548	266	143	120
Момент инерции J_{x_2}, кг·м^2	70	9	2	–
J_{y_2}, кг·м^2	152	48	80.5	
J_{z_2}, кг·м^2	72	455	85.1	

для $m_p=40$ кг, то степень устойчивости будет изменяться в зависимости от массы нагрузки, как показано на рис. 1. Очевидно, что для значений $m_p<40$ кг действительная степень устойчивости первой подсистемы ниже желаемой степени устойчивости. Другими словами, постоянные локальные коэффициенты обратной связи гарантируют устойчивость робота для нагрузок $m_p \leqslant 40$ кг. Однако для больших масс нагрузки (приблизительно 45 кг) подсистема не может быть сделана устойчивой постоянными коэффициентами обратной связи. Аналогично ведут себя и другие шарниры (подсистемы). Можно показать, что если выбрать коэффициенты обратной связи для наибольшей массы нагрузки, то управление не сможет обеспечить устойчивость робота для меньших масс нагрузки. Отсюда следует вывод о том, что для конкретного робота неадаптивное децентрализованное управление обеспечивает устойчивость системы для нагрузок не более (приблизительно) 40 кг. Для больших нагрузок необходимо применять адаптивное управление.

Аналогичные результаты (рис. 2*а*, *б*) также показывают, что робот практически устойчив относительно номинальной траектории с неадаптивным децентрализованным контроллером в случае, если масса нагрузки изменяется в пределах от 0 до 40 кг. Для больших нагрузок ($m_p \approx \approx 60$ кг) отслеживание номинальной траектории с такими же локальными коэффициентами обратной связи неудовлетворительно, так как появляется перерегулирование. Следовательно, большие нагрузки требуют изменения коэффициентов обратной связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vukobratovic K. M., Stokic M. D.* Contribution to the Decoupled Control of Large-Scale Mechanical Systems // Automatica. 1980. V. 16. № 1.
2. *Вукобратович М., Стокич Д.* Управление манипуляционными роботами. М.: Наука, 1985.
3. *Пол Р.* Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. М.: Наука, 1976.
4. *Freund E.* Fast Nonlinear Control with Arbitrary Pole-Placement for Industrial Robots and Manipulators // Int. J. Robotic Research. 1982. 1(1).
5. *Arimoto S., Miyazaki F.* Stability and Robustness of PID Feedback Control for Robot Manipulators and Sensory Capability. First Int. Symp. of Robotic Research. Bretton-Woods. New Hampshire. USA (1983).
6. *Dubowsky S., DesForges D.* The Application of Model Reference Adaptive Control to Robotic Manipulators. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control. 1979. V. 101.
7. *Takegaki M., Arimoto S.* An Adaptive Trajectory Control of Manipulators // Int. J. Control. 1981. V. 34. № 2.
8. *Horowitz R., Tomizuka M.* An Adaptive Control Scheme for Mechanical Manipulators-Compensation of Nonlinearity and Decoupling Control // ASME, Winter Annual Meeting (1980).
9. *Тимофеев А. В.* Конечно-разностные локально оптимальные алгоритмы решения неравенств, возникающих в адаптивных системах управления // Техн. кибернетика. 1975. № 4.
10. *Vukobratovic K. M., Kircanski M. N.* An Approach to Adaptive Control of Robotic Manipulators // IFAC J. Automatica. (Dec. 1986).
11. Slotine and Li. On the adaptive Control of Robot Manipulators. (June 1986).
12. Craig, Hsu and Sastry. Adaptive Control of Mechanical Manipulators. IEEE Conf., San Francisco. (April 1986).
13. *Vukobratovic K. M., Stokic M. D., Kircanski M. N.* Towards Nonadaptive and Adaptive Control of Manipulation Robots // IEEE Trans. Automatic Control. 1984. V. AC-29. № 9.
14. *Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н.* Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами М.: Мир, 1989.
15. *Stokic M. D., Vukobratovic K. M.* Synthesis of Robust Decentralized Control for Manipulation Robots in Parametric Plane Proc. of Symp. on Theory of Robots. Wien. 1986.
16. *Michel M. A.* Stability, Transient Behavior and Trajectory Bounds of Interconnected Systems // Int. J. Control. 1970. V. 11. № 4.
17. *Vukobratovic K. M., Stokic M. D.* Practical Stabilization of Robotic by Decentralized Control // Automatics. 1984. V. 20. № 3.

Югославия,
Белград

Поступила в редакцию
24.IV.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УДК 62-50

В. Е. БЕРБЮК, Я. И. ЯНЧАК

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ТРАНСПОРТНЫХ ДВИЖЕНИЙ ПОРТАЛЬНОГО РОБОТА

Для нелинейной модели трехстепенного портального робота, предложен алгоритм вычисления кусочно-постоянного управления с ограниченными по модулю компонентами, содержащего две точки переключения и переводящего рассматриваемую динамическую систему из произвольно заданного начального в произвольно заданное конечное фазовое состояние за конечное время. В основу алгоритма положено решение задачи быстродействия для управляемого движения материальной точки в n-мерном евклидовом пространстве при ограниченных по модулю компонентах вектора управления. Доказано, что при ненулевых фазовых скоростях в начале и в конце процесса управления это решение нетривиально. Алгоритм решения нелинейной задачи практически дает оптимальное по быстродействию управление в рассматриваемом простом классе управляющих воздействий, а в ряде случаев задания начальных и конечных условий – и в классе произвольных кусочно-непрерывных управлений. Эффективность алгоритма подтверждается численными примерами.

Введение. Успешное решение проблем комплексной автоматизации производства в значительной мере связано с созданием высокоэффективных промышленных роботов. В связи с этим актуальны задачи оптимизации конструкций и законов управления движением манипуляционных роботов, которые рассматривались в ряде работ, например в [1–12]. Более полно с библиографией и классификацией задач в области оптимизации управления робототехническими системами и подходами, применяемыми к их решению, можно ознакомиться в обзоре [12].

В настоящей статье рассматривается задача оптимального по быстродействию управления перемещением портального робота из заданного начального фазового состояния в заданное конечное. Транспортные движения робота описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. В рамках нелинейной модели построен алгоритм определения ограниченного по модулю кусочно-постоянного с двумя точками переключения программного управления, перемещающего портальный робот за конечное время из заданного начального фазового состояния в заданное конечное. Алгоритм позволяет в ряде случаев задания краевых условий получать решения задачи оптимального быстродействия. Результаты численного решения ряда вариантов нелинейной задачи управления движением портального робота и их анализ подтверждают эффективность построенного алгоритма.

При отсутствии взаимовлияния поступательного движения робота вдоль портала и вращательного движения в горизонтальной плоскости исходная нелинейная система дифференциальных уравнений сводится к линейной системе, описывающей управляемые движения материальной точки в трехмерном пространстве.

Построен численно-аналитический алгоритм решения задачи оптимального по быстродействию управления движением материальной точки в n-мерном евклидовом пространстве в классе n-мерных кусочно непрерывных управляющих воздействий с ограниченными по модулю компонентами. Показано, что если в заданных начальном и конечном фазовых состояниях фазовые скорости ненулевые, то время быстродействия в ис-

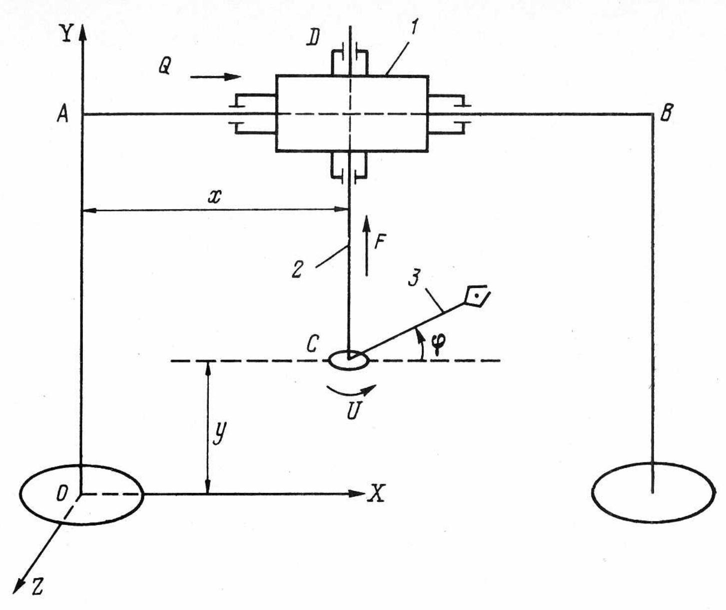


Рис. 1

следуемой задаче, вообще говоря, не равно максимальному из времен быстродействия по отдельным координатам. Построенный алгоритм при $n=3$ позволяет рассчитать оптимальное по быстродействию управление движением рассматриваемого портального робота в случае отсутствия взаимовлияния степеней подвижности.

1. Описание модели. Уравнения движения и постановка задачи управления. Портальный робот, кинематическая схема которого дана на рис. 1. представляет собой управляемую механическую систему, состоящую из трех абсолютно твердых тел: тело *1* — модуль горизонтального перемещения вдоль портала AB, параллельного оси OX инерциальной системы координат $OXYZ$, тело *2* — модуль вертикального перемещения вдоль направляющей CD, параллельной оси OY; тело *3* — модуль вращения вокруг CD, содержащий рабочий орган робота. Горизонтальное перемещение модулей *1*, *2*, *3* осуществляется под действием силы Q, направленной вдоль OX. Вертикальное перемещение модулей *2*, *3* обеспечивается силой F, приложенной к модулю *2* вдоль OY. Момент сил U, действующий относительно оси CD, осуществляет вращательное движение модуля *3*.

Введем обобщенные координаты (рис. 1): x — расстояние между параллельными прямыми OY и CD; y — ордината точки C; φ — угол поворота модуля *3*, отсчитываемый от положительного направления оси OX против часовой стрелки.

В роботах, содержащих модули вертикального перемещения, обычно применяют устройства пневморазгрузки (гидроразгрузки), позволяющие компенсировать собственный вес вертикально движущихся частей и избавить приводы от работы в асимметричных условиях.

В предположении наличия пневморазгрузки и отсутствия сил трения управляемые движения робота описываются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$m_2\ddot{y}=F,\ \ (Mx+m_3l\cos\varphi)^{\cdot\cdot}=Q,\ \ J\ddot{\varphi}-m_3l\ddot{x}\sin\varphi=U. \qquad (1.1)$$

В формулах (1.1) приняты обозначения: m_2 — суммарная масса модулей *2* и *3*; m_3 — масса модуля *3*; M — суммарная масса модулей *1*, *2*, *3*; J — момент инерции модуля *3* относительно оси вращения; l — расстояние от оси вращения до центра масс модуля *3*.

Сформулируем для рассматриваемой управляемой механической системы задачу быстродействия.

З а д а ч а Б. Пусть в начальный момент времени $t=0$, положение механической системы определяется фазовым состоянием

$$y(0)=y_0,\ x(0)=x_0,\ \varphi(0)=\varphi_0,\ y^{\cdot}(0)=y_0^{\cdot},\ x(0)=x_0^{\cdot},\ \varphi(0)=\varphi_0^{\cdot} \quad (1.2)$$

Требуется перевести систему (1.1) из начального состояния (1.2) в заданное конечное состояние

$$p(T)=y_{\text{T}},\ x(T)=x_{\text{T}},\ \varphi(T)=\varphi_{\text{T}},\ y^{\cdot}(T)=y_{\text{T}}^{\cdot},\ x^{\cdot}(T)= =x_{\text{T}}^{\cdot},\ \varphi^{\cdot}(T)=\varphi_{\text{T}}^{\cdot} \quad (1.3)$$

при помощи кусочно-непрерывных управлений $F(t)$, $Q(t)$, $U(t)$, удовлетворяющих ограничениям

$$|F(t)|\leqslant F_0,\ Q(t)|\leqslant Q_0,\ |U(t)|\leqslant U_0,\ t\in[0,\ T] \quad (1.4)$$

за минимально возможное конечное время. В формулах (1.4) F_0, Q_0, U_0 — заданные положительные постоянные.

2. Оптимальное по быстродействию управление движением материальной точки в n-мерном евклидовом пространстве. Рассмотрим вариационную задачу для материальной точки в n-мерном евклидовом пространстве, результаты решения которой будут существенно использованы при исследовании задачи оптимального быстродействия для портального робота, сформулированной в п. 1.

Пусть управляемые движения материальной точки в n-мерном евклидовом пространстве описываются уравнениями ($k=1,\ 2,\ldots,\ n$)

$$x_k^{\cdot\cdot}=U_k. \quad (2.1)$$

З а д а ч а Л. Требуется перевести систему (2.1) из заданного начального фазового состояния ($k=1,\ 2,\ldots,\ n$)

$$x_k(0)=x_{0k},\ x_k^{\cdot}(0)=x_{0k}^{\cdot} \quad (2.2)$$

в заданное конечное фазовое состояние ($k=1,\ 2,\ldots,\ n$)

$$x_k(T)=x_{\text{T}k},\ x_k^{\cdot}(T)=x_{\text{T}k}^{\cdot} \quad (2.3)$$

при помощи кусочно-непрерывных, ограниченных по модулю управлений $U_k(t)$ ($k=1,\ 2,\ldots,\ n$)

$$|U_k(t)|\leqslant 1,\ t\in[0,\ T] \quad (2.4)$$

за минимально возможное время $T=T_*$.

Очевидно, решение задачи Л эквивалентно решению n следующих одномерных задач А_k ($k=1,\ 2,\ldots,\ n$) с минимально возможным общим временем процесса управления $T=T_*$.

З а д а ч а А_k. Определить управляющее воздействие $U_k(t)$ удовлетворяющее ограничению (2.4) и перемещающее изображающую точку фазовой плоскости (x_k, $x_k^{\cdot}$) в силу соотношений (2.1) за заданное конечное время T из начального состояния (2.2) в конечное состояние (2.3).

Обозначим через θ_k множество значений времени T, для которых задача А_k разрешима. Тогда для T_* справедливо соотношение $T_*= =\inf(\theta_1\cap\theta_2\cap\ldots\cap\theta_n)$. Если каждое множество θ_k состоит из всех T, больших некоторого $T_k^* = \inf\theta_k$, то выражение для T_* может быть переписано в виде

$$T*=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\inf\theta_k=\max_{1\leqslant k\leqslant n} T_k^* \quad (2.5)$$

и, следовательно, решение задачи Л тривиально.

Опустим для удобства индекс k в формулировке задачи А_k и в соотношениях (2.1)—(2.4), назвав ее при этом задачей А. Множество значений времени T, для которых задача А разрешима, обозначим через θ. Ниже будет показано, что множество θ, вообще говоря, двусвязно и, следовательно, T_* не может быть определено формулой (2.5). Кроме того, множество значений времени, для которых задача А разрешима, не из-

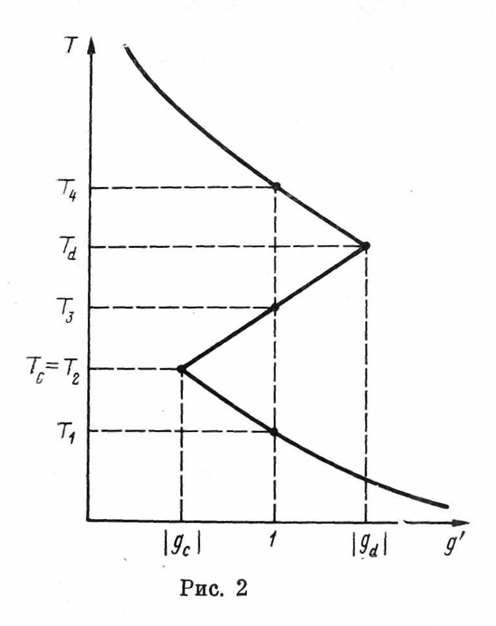


Рис. 2

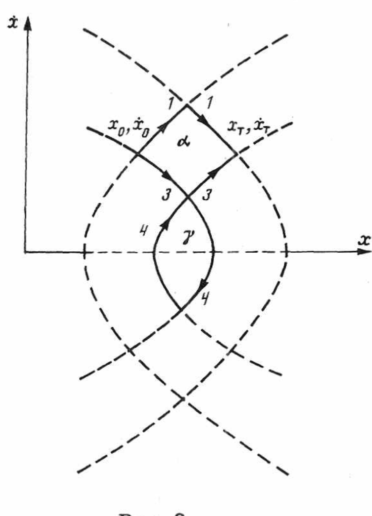


Рис. 3

менится, если вместо произвольных ограниченных по модулю кусочно-непрерывных управлений рассматривать релейные управления с одной точкой переключения:

$$U(t)=\begin{cases} q, & 0\leqslant t\leqslant \tau \\ -q, & \tau<t\leqslant T \end{cases} \tag{2.6}$$

$$0\leqslant \tau\leqslant T<\infty,\ q=\text{const},\ |q|=q'\leqslant 1.$$

Задачу А в классе управлений (2.6) будем называть задачей A_q, а множество значений времени T, для которых задача A_q разрешима, обозначим через θ_q.

Двусвязность множества θ определяется характером зависимости величины $q'=|q|$ от времени процесса управления $T\in\theta_q$ в задаче A_q, а именно наличием у этой функции трех участков монотонности чередующегося знака (рис. 2).

Приведенные замечания относительно свойств множеств θ и θ_q, а также определенной на θ_q функции $q'(T)$ сформулируем в виде утверждения.

Утверждение 2.1. Для каждого значения времени $T\in\theta_q$ решение задачи A_q единственно. Функция $q'(T)$ непрерывна на θ_q. Существуют действительные постоянные $0<T_1\leqslant T_2\leqslant T_3\leqslant T_4<\infty$, такие, что множество θ_q представимо в виде

$$\theta_q=[T_1,\ T_2]\cup[T_2,\ T_3]\cup[T_4,\ \infty), \tag{2.7}$$

и функция $q'(T)$ строго убывает при $T\in[T_1,\ T_2]$, $T\in[T_4,\ \infty)$ и строго возрастает при $T\in[T_2,\ T_3]$. Множества θ и θ_q совпадают.

Идея доказательства утверждения 2.1 основана на рассмотрении зависимости $T(q')$, обратной к функции $q'(T)$, выделении однозначных ветвей многозначной, вообще говоря, функции $T(q')$ и исследовании их на монотонность.

Доказательство. Рассмотрим задачу определения управления вида (2.6), где $|q|=q'$ — заданная положительная постоянная, переводящего изображающую точку фазовой плоскости $(x,\ \dot{x})$ уравнения

$$\ddot{x}=U \tag{2.8}$$

из заданного начального состояния

$$x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \tag{2.9}$$

в заданное конечное состояние

$$x(T)=x_T,\ x^{\cdot}(T)=x_T^{\cdot} \tag{2.10}$$

за конечное время T. Решение сформулированной задачи В состоит в определении неизвестных параметров закона управления (2.6) — T, τ, ξ, где параметр ξ определяется соотношением $q=\xi|q|=\xi q'$. Покажем, что решение задачи В существует при произвольно заданных действительных x_0, $x_0^{\cdot}$, x_T, $x_T^{\cdot}$ (кроме $x_T-x_0=x_0^{\cdot}=x_T^{\cdot}=0$) и произвольном $q^{\cdot}>0$, т. е. функция $T(q')$ определена для всех $q'>0$. Случай $x_T-x_0=x_0^{\cdot}=x_T^{\cdot}=0$ — особый. В этом случае функция $T(q')$ не определена, однако определена функция $q(T)\equiv 0$. В дальнейшем этот случай не рассматривается как тривиальный с точки зрения задачи управления.

Рассмотрим фазовые кривые уравнения (2.8) при $U=q=\text{const}$. Это симметричные относительно оси $xx^{\cdot}=0$ параболы:

$$x=0.5x^{\cdot 2}/q+x_N-0.5x_N^{\cdot 2}/q. \tag{2.11}$$

В (2.11) (x_N, $x_N^{\cdot}$) — координаты точки, принадлежащей фазовой параболе. Подставляя поочередно в (2.11) вместо (x_N, $x_N^{\cdot}$) координаты начальной (2.9) и конечной (2.10) точек и полагая $q=\xi|q|$, $\xi=\pm 1$, получим две пары парабол, соответствующих начальной и конечной точкам фазовой плоскости. Пусть начальная и конечная точки лежат на одной и той же параболе. Последнее возможно только при определенном значении $q=q_0$, вычисляемом соотношением

$$q_0=0.5(x_T^{\cdot 2}-x_0^{\cdot 2})(x_T-x_0)^{-1}. \tag{2.12}$$

Из уравнения (2.8) следует, что движение изображающей точки фазовой плоскости из (2.9) в (2.10) по общей параболе возможно лишь при выполнении условия $\operatorname{sign}(x_T^{\cdot}-x_0^{\cdot})=\operatorname{sign} q_0$. Аналогично из (2.8), (2.11) следует, что фазовая траектория в задаче В состоит из кусков парабол с различными значениями ξ тогда и только тогда, когда хотя бы для одного из значений $\xi=\pm 1$ существуют действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x=0.5x^{\cdot 2}/q+x_0-0.5x_0^{\cdot 2}/q \\ x=-0.5x^{\cdot 2}/q+x_T+0.5x_T^{\cdot 2}/q \\ q=\xi q' \end{cases} \tag{2.13}$$

относительно неизвестных координат x, $x^{\cdot}$ точки пересечения парабол, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &x^{\cdot}\geqslant x_0^{\cdot},\ x^{\cdot}\geqslant x_T^{\cdot},\ \xi=1, \\ &x^{\cdot}\leqslant x_0^{\cdot},\ x^{\cdot}\leqslant x_T^{\cdot},\ \xi=-1. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Как следует из (2.13), x, $x^{\cdot}$ действительны лишь в случае выполнения неравенства

$$q(x_T-x_0)+0.5(x_T^{\cdot 2}+x_0^{\cdot 2})\geqslant 0, \tag{2.15}$$

при этом $x^{\cdot}$ определяется формулами

$$\begin{aligned} &x^{\cdot}=\eta^{*}\Omega(q),\ q=\xi q',\ \xi=\pm 1,\ \eta=\pm 1, \\ &\Omega(q)=\sqrt{q(x_T-x_0)+0.5(x_T^{\cdot 2}+x_0^{\cdot 2})}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Анализ соотношений (2.13), (2.16) показывает, что координаты точки пересечения фазовых парабол полностью определяются выбором значений параметров ξ и η. Если ордината этой точки удовлетворяет условию (2.14), то все необходимые параметры закона управления (2.6), являющегося решением задачи В, вычисляются однозначно.

Обозначим через R то из чисел $x_0^{\cdot}$, $x_T^{\cdot}$, модуль которого больше, через r — число с меньшим модулем. Если $|x_0^{\cdot}|=|x_T^{\cdot}|$, то полагаем $R=x_0^{\cdot}$, $r=$

$=x_T^{\cdot}$. Рассмотрим решение задачи В при различных значениях q'. Пусть $0<q'<|q_c|$, $q_c\neq0$. Тогда, как следует из (2.12), условие (2.15) выполнено при любом значении $\xi=\pm1$. Независимо от значения ξ выполняется также неравенство $|r|<\Omega(q)<|R|$. Условия (2.14) можно удовлетворить, лишь принимая в соотношениях (2.16) $\eta=-\operatorname{sign}R$. Из (2.14) следует также $\xi=\eta$. Итак, значения

$$\xi=\eta=-\operatorname{sign}R \tag{2.17}$$

определяют единственное решение задачи В.

Можно непосредственно убедиться, что при $q'>|q_d|$, где

$$q_d=0.5(x_T^{\cdot 2}+x_0^{\cdot 2})(x_T-x_0)^{-1}, \tag{2.18}$$

неравенство (2.15) удовлетворяется лишь при $\xi=\operatorname{sign}(x_T-x_0)$. Для этого значения ξ, как следует из (2.18), выполнено неравенство $\Omega(q)>|R|$. Последнее совместно с (2.14) однозначно определяет $\xi=\eta$. Таким образом, значения

$$\eta=\xi=\operatorname{sign}(x_T-x_0) \tag{2.19}$$

определяют единственное решение задачи В.

Пусть, наконец, $|q_c|\leqslant q'\leqslant|q_d|$. Тогда условие (2.15) выполнено независимо от ξ. Если $\xi=\operatorname{sign}(x_T-x_0)$, то, согласно (2.12), удовлетворяется неравенство $\Omega(q)\geqslant|R|$. Последнее совместно с (2.14) определяют значения ξ и η по формуле (2.19). С учетом (2.12) для $\xi=-\operatorname{sign}(x_T-x_0)$ выполнено неравенство $\Omega(q)\leqslant|r|$. Если $x_T^{\cdot}x_0^{\cdot}<0$, то (2.14) может быть удовлетворено лишь при $q'=|q_0|$, $r(x_T-x_0)<0$ (или $R(x_T-x_0)>0$). При этом пара значений (ξ, η) определяется формулой (2.17). Фазовые траектории в задаче В, соответствующие значениям ξ, η, вычисленным по формулам (2.17), (2.19), совпадают и представляют собой отрезок общей параболы, соединяющей начальную (2.9) и конечную (2.10) точки фазовой плоскости. При $x_0^{\cdot}x_T^{\cdot}\geqslant0$, возможны два различных варианта. В первом случае $R(x_T-x_0)<0$ и условие (2.14), как показывает непосредственная подстановка различных значений η, невыполнимо. Во втором случае $R(x_T-x_0)>0$ и условие (2.14) удовлетворено независимо от η. Следовательно, существуют две пары значений параметров ξ, η, определяющие два различных решения задачи В. Одно из них соответствует значениям ξ, η, вычисляемым по формуле (2.17), второе — значениям

$$\eta=-\xi=\operatorname{sign}(x_T-x_0)=\operatorname{sign}R. \tag{2.20}$$

Таким образом, при произвольных краевых условиях (2.9), (2.10), кроме $x_T-x_0=x_0^{\cdot}=x_T^{\cdot}=0$, функция $T(q')$ определена для всех $q'>0$. Если $|q_c|\leqslant q'\leqslant|q_k|$ и выполнены условия

$$\begin{cases} x_0^{\cdot}x_T^{\cdot}\geqslant0 \\ R(x_T-x_0)>0, \end{cases} \tag{2.21}$$

то каждому значению аргумента q' соответствуют три различные пары значений ξ, η, определяющих решения задачи В.

Как показывает непосредственная подстановка, при выполнении условий (2.21) значения функции $T(q')$ в точке $q'=|q_0|$ для (ξ, η), определяемых из (2.19) и (2.20), совпадают. Аналогично в точке $q'=|q_d|$ значения $T(q')$ равны для (ξ, η) из соотношений (2.17) и (2.20). Обозначим $T(|q_c|)=T_c$, $T(|q_d|)=T_d$. В частности, при выполнении условий (2.21) со знаком равенства в первом соотношении, $|q_c|=q'=|q_d|$ и, следовательно, $T_c=T_d$. Наконец, если $|q_c|<q'<|q_d|$ и условия (2.21) выполнены как строгие неравенства, то различным парам (ξ, η) отвечают различные значения функции $T(q')$. В иных случаях функция $T(q')$ однозначна.

Аналитическая зависимость $T(q')$ определяется соотношением

$$T(q')=(|x_0^{\cdot}-x^{\cdot}(q')|+|x^{\cdot}(q')-x_T^{\cdot}|)q'^{-1}, \tag{2.22}$$

где $x^{\cdot}(q')$ — ордината изображающей точки фазовой плоскости уравнения (2.8) с управлением (2.6) в момент переключения $t=\tau_2$, вычисляемая по формуле (2.16). Очевидно, функция $T(q')$ непрерывно дифференцируема на интервалах изменения q', соответствующих постоянным значениям пары параметров ξ, η. Исследуем монотонность $T(q')$ для различных пар значений ξ, η, определяемых формулами (2.17), (2.19), (2.20). Возьмем производную от T по q'. Учитывая, что при выполнении условия (2.14) имеет место тождество

$$|x^{\cdot}-x_0^{\cdot}|+|x^{\cdot}-x_{\text{т}}^{\cdot}|\equiv\begin{cases}2x^{\cdot}-x_0^{\cdot}-x_{\text{т}}^{\cdot}, & \xi=1\\ x_0^{\cdot}+x_{\text{т}}^{\cdot}-2x^{\cdot}, & \xi=-1,\end{cases}$$

получим соотношение

$$dT/dq'=\xi(2q'dx^{\cdot}/dq'-2x^{\cdot}+x_0^{\cdot}+x_{\text{т}}^{\cdot})q'^{-2}. \qquad (2.23)$$

Отметим, что, согласно (2.16),

$$2q'dx^{\cdot}/dq'=2q'\xi(x_{\text{т}}-x_0)(2x^{\cdot})^{-1}=q(x_{\text{т}}-x_0)(x^{\cdot})^{-1}=$$
$$=(x^{\cdot 2}-0.5(x_{\text{т}}^{\cdot 2}+x_0^{\cdot 2}))(x^{\cdot})^{-1},\ x^{\cdot}\neq 0. \qquad (2.24)$$

Подставляя (2.24) в (2.23), получим

$$dT/dq'=-\xi\eta(x^{\cdot}-x_0^{\cdot})^2+(x^{\cdot}-x_{\text{т}}^{\cdot})^2q'^{-2}\Omega(q)^{-1},\quad \Omega(q)\neq 0. \qquad (2.25)$$

Отметим выполнение условия $\Omega(q)\neq 0$ (или $x^{\cdot}\neq 0$) на интервалах изменения q', соответствующих постоянным значениям пары (ξ, η).

Из соотношения (2.25) непосредственно следует монотонное убывание функции $T(q')$ для значений (ξ, η), определяемых формулами (2.17), (2.19), и монотонное возрастание в случае, если пара (ξ, η) определяется равенством (2.20). Если условия (2.21) не выполнены, то в точке $q'=|q_c|$ совпадают значения функции $T(q')$ для (ξ, η), определяемых равенствами (2.17) и (2.19). В этом случае функция $T(q')$ монотонно убывает на всем промежутке изменения q'. При выполнении условий (2.21), согласно вышеизложенному, возможно выделение следующих трех однозначных ветвей функции $T(q')$: $T_{0d}(q')$ — монотонно убывающая на интервале $(0;\ |q_d|)$; $T_{cd}(q')$ — монотонно возрастающая на $(|q_c|;\ |q_d|)$; $T_{cb}(q')$ — монотонно убывающая на $(|q_d|;\ \infty)$. Функциям $T_{0d}(q')$, $T_{cd}(q')$, $T_{cb}(q')$ отвечают пары значений (ξ, η), определяемых формулами (2.17), (2.20), (2.19) соответственно. Очевидно, выполнение равенств $T_{0d}(|q_d|)=T_{cd}(|q_d|)=T_d$, $T_{cd}(|q_c|)=T_{cb}(|q_c|)=T_c$.

Рассмотрим функцию $q'(T)$, обратную к $T(q')$. Эта функция определена для всех $T>0$, однозначна и непрерывна. При выполнении условия (2.21) функция $q'(T)$ монотонно убывает на интервалах $(0;\ T_c)$, $(T_d;\ \infty)$ и монотонно возрастает, когда $T\in(T_c;\ T_d)$. Если условие (2.21) не выполняется, то функция $q'(T)$ строго убывает на интервале $T\in(0;\ \infty)$.

Проекция части графика $q'(T)$, лежащей в области $q'\leqslant 1$, на временную ось является множеством θ_q. Представление полученного таким образом множества θ_q в виде объединения интервалов, на которых функция $q'(T)$ монотонна, не вызывает затруднений.

При выполнении условия (2.21) и $q\leqslant 1$, упоминаемые в формулировке утверждения 2.1, постоянные T_i $(i=1, 2, 3, 4)$ равны: $T_1=T_{0d}(1)$, $T_2=T_c$, $T_3=T_4=T_d$. Если выполнено (2.21) и $|q_c|<1<|q_d|$, то $T_1=T_{0d}(1)$, $T_2=T_c$, $T_3=T_{cd}(1)$, $T_4=T_{cb}(1)$. В остальных случаях $T_i=T_{cb}(1)$, $i=1, 2, 3, 4$. График функции $q'(T)$ при выполнении условий (2.21), $|q_c|<1<|q_d|$, и соответствующее множество θ_q изображены на рис. 2.

Докажем последнее положение утверждения 2.1 о равенстве множеств θ и θ_d. Покажем справедливость логического утверждения: $T\in\theta\Leftrightarrow T\in\theta_q$. Обратное следование очевидно, так как $\theta_q\subset\theta$. Прямое следование в случае, когда θ_q односвязно, вытекает из того, что θ_q содержит все значения вре-

мени, бо́льшие T_1, а T_1 — минимально возможное время, для которого существует решение задачи А. Последнее несложно проверить, применяя принцип максимума Понтрягина [13]. Рассмотрим случай двусвязности множеств θ_q. Положим, для определенности, что условия (2.21) выполнены для $R>0$. Значениям времени T_1, T_3, T_4 на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ уравнения (2.8) отвечают фазовые траектории, состоящие из кусков парабол с предельными значениями q'. На рис. 3 эти траектории обозначены стрелками и цифрами *1*, *3*, *4* соответственно.

Докажем, что для произвольного кусочно-непрерывного управления $U(t)$, $t\in[0; T]$, являющегося решением задачи А, справедливо неравенство

$$T\geqslant|x_0^{\cdot}-x^{\cdot}_{\min}|+|x^{\cdot}_{\min}-x_{\mathrm{T}}^{\cdot}|, \tag{2.26}$$

где $x^{\cdot}_{\min}$ — это минимальное значение обобщенной скорости $x^{\cdot}$ на фазовой траектории, соответствующей управлению $U(t)$, $t\in[0; T]$. Действительно,

$$T=\int_0^{\mathrm{T}} dx^{\cdot}(t)/U(t)=\int_0^{\mathrm{T}}|dx^{\cdot}(t)|/|U(t)|=\int_0^{\mathrm{T}}|dx^{\cdot}(t)|\geqslant$$

$$\geqslant|x_0^{\cdot}-x^{\cdot}_{\min}|+|x^{\cdot}_{\min}-x_{\mathrm{T}}^{\cdot}|.$$

Пусть $U(t)$, $t\in[0; T]$ — решение задачи А. Докажем, что существует управление вида (2.6), решающее задачу A_q для того же значения T времени процесса управления. Доказательство проведем от противного. Предположим T такое, что задача А неразрешима. Очевидно, при этом $T_3<T<T_4$. С другой стороны, фазовая траектория, соответствующая решению задачи А, либо принадлежит области α, ограниченной траекториями *1* и *3* (рис. 3), и тогда $T\leqslant T_3$, либо попадает в область $\mathbb{R}^2\setminus(\alpha\cup\gamma)$, где γ — односвязная область, ограниченная самопересекающейся траекторией *4* (рис. 3). В последнем случае изображающая точка уравнения (2.8) с управлением, ограниченным по модулю единицей, может попасть в конечное положение $(x_T, x_T^{\cdot})$, лишь заходя в полуплоскость $x^{\cdot}<0$ и пересекая проходящую через $(x_T, x_T^{\cdot})$ параболу с $q=1$ в точке с ординатой $x_p^{\cdot}\leqslant x_4^{\cdot}$, где $x_4^{\cdot}$ — ордината точки пересечения упомянутой параболы и траектории *4* в полуплоскости $x^{\cdot}<0$ (рис. 3). Согласно оценке (2.26), $T\geqslant|x_0^{\cdot}-x_p^{\cdot}|+|x_p^{\cdot}-x_T^{\cdot}|\geqslant|x_0^{\cdot}-x_4^{\cdot}|+|x_4^{\cdot}-x_T^{\cdot}|=T_4$, что противоречит исходному предположению. Полученное противоречие доказывает утверждение о тождестве множеств θ и θ_q. Аналогичное доказательство можно провести в случае, если условия (2.21) выполнены при $R<0$. Утверждение 2.1 доказано.

Следствие. Если T совпадает с одним из значений T_1, T_3, T_4, то задача А имеет единственное решение, совпадающее с решением задачи A_q. Действительно, как следует из доказательства тождества множеств θ и θ_q, решение задачи А, не совпадающее с решением задачи A_q при $T=T_1$ или $T=T_4$, переводит изображающую точку уравнения (2.8) из (2.9) в (2.10) за время, строго большее T, а при $T=T_3$ — за строго меньшее T время.

Свойства множества θ_q и функции $q'(T)$, доказанные в утверждении 2.1, позволяют предложить следующий алгоритм решения задачи Л.

Шаг 1. По заданным начальным (2.2) и конечным (2.3) условиям, используя соотношения (2.16), (2.22), следуя доказательству утверждения 2.1, вычисляем постоянные T_{ik} $(i=1, 2, 3, 4)$, определяющие множества θ_k $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Шаг 2. Полагаем $T=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} T_{ik}$.

Шаг 3. Последовательно, для $k=1, 2, \ldots, n$ проверяем выполнение условия

$$T\in(T_{3k}, T_{4k}). \tag{2.27}$$

Если условие (2.27) не выполнено ни при каком $k=1, 2, \ldots, n$, переходим к шагу 5. Если (2.27) выполнено для $k=k_0$ $(1\leqslant k_0\leqslant n)$, выполняем шаг 4.

Шаг 4. Полагаем $T=T_{4k_0}$. Возвращаемся к шагу 3.

Шаг 5. Принимаем $T_*=T$. Находим значения параметров q_k и τ_k закона управления (2.6) для каждой из задач A_k, используя свойства непрерывности и кусочной монотонности функций $q_k'(T)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Найденное время T_* и соответствующие ему управления вида (2.6) в задачах A_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ дают решение задачи быстродействия.

Очевидно, построенное по данному алгоритму оптимальное управление $\mathbf{U}^*(t)=(U_1^*(t), U_2^*(t), \ldots, U_n^*(t))$, $t\in[0;\ T_*]$, вообще говоря, неединственно. Отличительное свойство этого управления по сравнению с любым другим оптимальным по быстродействию управлением $\mathbf{U}(t)$, $t\in[0;\ T_*]$, в задаче Л определяется неравенствами

$$\max_{t\in[0;T_*]} |U_k^*(t)| \leqslant \max_{t\in[0;T_*]} |U_k(t)|, \quad \mathrm{k}=1, 2, \ldots, n.$$

Действительно, рассматривая значения параметров $q_k'^*$, $k=1, 2, \ldots, n$, управления $\mathbf{U}^*(t)$, $t\in[0;\ T_*]$, как ограничения на величины n произвольных кусочно-непрерывных компонент управляющего воздействия $\mathbf{U}(t)$, несложно убедиться в том, что не существует управления, отличного от $\mathbf{U}^*(t)$, удовлетворяющего этим ограничениям и переводящего изображающую точку системы (2.1) из (2.2) в (2.3) $(k=1, 2, \ldots, n)$ за время T_*. Последнее вытекает из единственности решения задачи A_k в случае, если T равно одному из значений T_{1k}, T_{3k}, T_{4k} (см. следствие утверждения 2.1).

Можно непосредственно убедиться, что сформулированная в п. 1 задача оптимального быстродействия для портального робота с тремя степенями свободы, при выполнении условий

$$|\varphi(t)-\pi/2|\ll 1, \quad |\dot\varphi(t)|\ll 1, \quad t\in[0;\ T], \tag{2.28}$$

введением новых безразмерных переменных и управлений по формулам $x_1=T_0^{-2}F_0^{-1}m_2y$, $x_2=T_0^{-2}Q_0^{-1}(Mx-m_3l\varphi)$, $x_3=T_0^{-2}U_0^{-1}(J\varphi-m_3lx)$, $\tau=t/T_0$, $U_1=F/F_0$, $U_2=Q/Q_0$ сводится к вариационной задаче Л при $n=3$. Таким образом, решение задачи оптимального быстродействия для рассматриваемого портального робота в случае выполнения условий (2.28) может быть получено при помощи вышеописанного алгоритма.

3. Нелинейная задача управления. Рассмотрим задачу Б, сформулированную в п. 1. Введем новые переменные по формулам

$$x_1=T_0^{-1}F_0^{-1}m_2y, \quad x_2=T_0^{-1}Q_0^{-1}(Mx+m_3l\cos\varphi),$$
$$x_3=\varphi, \quad U_1=F/F_0, \quad U_2=Q/Q_0, \quad U_3=UT_0/J, \quad \tau=t/T_0. \tag{3.1}$$

В этих переменных уравнения (1.1), (1.2) и два первых соотношения из (1.6) примут вид (2.1) при $k=1, 2$, а уравнение (1.3) и ограничение на управление U_3 преобразуются следующим образом:

$$\ddot x_3-k\sin x_3(U_2-p(\cos x_3)^{\cdot\cdot})=U_3,$$
$$k=m_3lT_0^2F_0/(MJ), \quad p=m_3l/(T_0^2F_0), \tag{3.2}$$

$$|U_3|\leqslant U_0T_0^2/J=\alpha. \tag{3.3}$$

Краевые условия (1.4), (1.5) в переменных (3.1) определяются формулами (2.2), (2.3) при $k=1, 2, 3$. Назовем задачу Б в переменных (3.1), определяемую соотношениями (2.1) при $k=1, 2$, (2.2), (2.3) при $k=1, 2, 3$, (3.2), (3.3), задачей Н. Очевидно, решение задачи Н эквивалентно решению задач A_1 и A_2 в переменных (3.1) и сформулированной ниже задачи H_3 для минимально возможного общего времени процесса управления $T=T_M$.

З а д а ч а H_3. Пусть заданы T — время процесса управления и кусочно-непрерывная функция $U_2(t)$, $t\in[0;\ T]$. Требуется при помощи кусочно-не-

прерывного управления $U_3(t)$, удовлетворяющего ограничению (3.3), перевести за время T изображающую точку фазовой плоскости $(x_3, x_3^{\cdot})$ уравнения (3.2) из начального состояния (2.2) для $k=3$ в конечное состояние (2.3) для $k=3$.

Очевидно, для времени быстродействия T_M в задаче Н справедлива следующая оценка снизу:

$$T_M \geqslant \inf(\theta_1 \cap \theta_2) = T_q. \tag{3.4}$$

Равенство в (3.4) достигается в случае существования решения задачи Н_3 при $T=T_q$ и $U_2(t)$, $t\in[0; T_q]$, являющейся решением задачи А_2 при $T=T_q$. В этом случае будем говорить, что реализация цели управления в плоскости $(x_3, x_3^{\cdot})$ не является наиболее ограничительной с точки зрения времени быстродействия.

Введем в рассмотрение следующий класс кусочно-постоянных управлений, содержащих две точки переключения:

$$\begin{aligned}
&U_1(\tau)=\begin{cases} q_1, & 0\leqslant\tau_1\leqslant\tau \\ -q_1, & \tau_1\leqslant\tau\leqslant T, \quad |q_1|\leqslant 1, \end{cases}\\
&U_2(\tau)=\begin{cases} q_2, & 0\leqslant\tau_2\leqslant\tau \\ -q_2, & \tau_2\leqslant\tau\leqslant T, \quad |q_2|\leqslant 1, \end{cases}\\
&U_3(\tau)=\begin{cases} V, & 0\leqslant\tau\leqslant\tau_2, \\ V', & \tau_2\leqslant\tau\leqslant T, \quad |U_3|\leqslant\alpha, \end{cases}\\
&0\leqslant\tau_1\leqslant T<\infty, \quad 0\leqslant\tau_2\leqslant T.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Ниже будет показано, что в классе управлений (3.5) при произвольных заданных начальных и конечных значениях обобщенных координат и скоростей, кроме случая, когда условия

$$x_{Tk}-x_{0k}=x_{Tk}^{\cdot}+x_{0k}^{\cdot}=0 \tag{3.6}$$

выполнены для $k=2$ и нарушаются для $k=3$, динамическая система, определяемая соотношениями (2.1) при $k=1$, 2 (3.2), управляема. Кроме того, если при $U_2(t)$, являющейся решением задачи А_2 в классе управлений (2.6) при $T=T_q$, реализация цели управления в плоскости $(x_3, x_3^{\cdot})$ не является наиболее ограничительной с точки зрения времени быстродействия, то класс управлений вида (3.5), обладая простой структурой, содержит вместе с тем управление, оптимальное по быстродействию.

В дальнейшем будем рассматривать следующую задачу управления.

З а д а ч а У. Пусть равенства (2.2), (2.3) при $k=1$, 2, 3 определяют начальное и конечное положения изображающей точки динамической системы, движение которой в фазовом пространстве описывается соотношениями (2.1) при $k=1$, 2 (3.2). Требуется определить управление вида (3.5), переводящее рассматриваемую систему за конечное время T из начального состояния в конечное.

Исследуем вопрос о существовании решения задачи У. Введем в рассмотрение семейство кривых на фазовом цилиндре $\Phi=\{(x_3, x_3^{\cdot}): -\pi<x_3\leqslant \leqslant\pi, -\infty<x_3^{\cdot}<\infty\}$, являющихся геометрическим местом точек, координаты которых равны значениям при $t=t_1$ решений задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, получаемой из уравнения (3.2) с $U_3=\text{const}=V$, $V\in[-\alpha; \alpha]$, и некоторых начальных условий, заданных в момент времени $\tau=t_0$. Кривая семейства определяется заданием начальной t_0 и конечной t_1 точек промежутка интегрирования, начальных условий в точке $\tau=t_0$, а также функции $U_2(\tau)$, $\tau\in[t_0; t_1]$. Если $t_1<t_0$, то интегрирование производится в обратном времени. Определяемые таким образом кривые назовем изохронами. Если изохрона задана, то точка на ней определяется выбором параметра $V\in[-\alpha; \alpha]$.

Из теоремы о непрерывной зависимости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров [14] следует непрерывность координат точки на изохроне по параметру $V \in [-\alpha; \alpha]$.

Очевидно, существование решения задачи У для заданного времени T процесса управления эквивалентно выполнению двух условий: 1) $T \in \theta_1 \cap \theta_2$; 2) существует пересечение изохроны, определяемой значениями $t_0=0$, $t_1=\tau_2$ и начальными условиями (2.2) для $k=3$, и изохроны с $t_0=T$, $t_1=\tau_2$ и начальными условиями (2.3) для $k=3$. При этом параметр $\tau_2(T)$ и функция $U_2(t, T)$, $t \in [0; T]$, вида (2.6), входящие в определение изохрон, однозначно задаются решением задачи A_2. В дальнейшем рассматриваем лишь изохроны со значениями параметров t_0, t_1, указанными в условии 2). Ниже будет доказано, что условия 1), 2) выполнены, если T достаточно велико.

Рассмотрим некоторые свойства функций и параметров исследуемой задачи при неограниченном увеличении времени T процесса управления. Отметим прежде всего, что начиная с некоторого достаточно большого T абсолютное значение параметра $q_2(T)$ компоненты U_2 управления (3.5) монотонно убывает и стремится к нулю при $T \to \infty$, а величина $|\Delta t| = |t_1 - t_0|$ для каждой из рассматриваемых изохрон монотонно возрастает, кроме случаев, когда выполнены условия (3.6) при $k=2$. Первое утверждение следует из монотонности функции $q'(T)$ при $T \geqslant T_4$ (см. утверждение 2.1), а второе — вытекает из соотношений (2.16), (2.22), если учесть, что слагаемые в правой части формулы (2.22) равны соответственно τ_2 и $T - \tau_2$.

Задание краевых условий и времени управления T в задаче У однозначно определяет функцию $U_2(t, T)$, $t \in [0, T]$, являющуюся решением задачи A_2, и соответствующую пару изохрон. Каждой изохроне соответствует свое значение параметра $\Delta t(T) = t_1 - t_0$. Справедлива следующая лемма, описывающая асимптотическое поведение радиуса-вектора точки изохроны при $T \to \infty$.

Лемма. Пусть $x_3(V, \Delta t, T)$, $x_3^{\cdot}(V, \Delta t, T)$ — координаты точки изохроны, определяемой фиксированным ненулевым значением параметра $V \in [-\alpha; \alpha]$. Если для рассматриваемой изохроны при достаточно больших T величина $\Delta t(T)$ не обращается в нуль, то асимптотическое поведение функций $x_3(V, \Delta t, T)$, $x_3^{\cdot}(V, \Delta t, T)$ описывается соотношениями

$$\begin{gathered} x_3(V, \Delta t, T) \operatorname{sign} V \operatorname{sign} \Delta t \underset{T \to \infty}{\to} \infty, \\ x_3^{\cdot}(V, \Delta t, T) \operatorname{sign} V \operatorname{sign} \Delta t \underset{T \to \infty}{\to} \infty. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Доказательство леммы. На отрезке постоянства управлений $U_2(t)$, $U_3(t)$, $t \in [t_0; t_1]$, существует первый интеграл уравнения (3.2)

$$\begin{gathered} 0.5 x_3^{\cdot 2}(t)(1 - pk \sin^2 x_3(t)) = V(x_3(t) - x_3(t_0)) - \\ - kF(T)(\cos x_3(t) - \cos x_3(t_0)) + D_0, \quad t \in [t_0; t_1], \end{gathered} \tag{3.8}$$

где $V = U_3(t) = \text{const}$, $D_0 = 0.5 x_3^{\cdot 2}(t_0)(1 - pk \sin^2 x_3(t_0)) = \text{const}$,

$$F(T) = U_2(t, T) = \begin{cases} q_2(T), & \Delta t \geqslant 0 \\ -q_2(T), & \Delta t < 0. \end{cases}$$

С учетом выражений для параметров p и k справедлива оценка множителя при $0.5 x_3^{\cdot 2}(t)$:

$$0 < a \leqslant 1 - pk \sin^2 x_3 \leqslant 1, \quad a = 1 - pk = \text{const}. \tag{3.9}$$

Обозначим правую часть (3.8) через $\Psi(x_3(t), V, F(T))$. Эта функция принимает лишь неотрицательные значения и обращается в нуль лишь одновременно с $x_3^{\cdot}$. Первая и вторая полные производные от функции

$\Psi(x_3(t), V, F(T))$ по t равны:

$$d\Psi/dt = \partial\Psi/\partial x_3 x_3^{\cdot} = (V + kF(T)\sin x_3)x_3^{\cdot}, \qquad (3.10)$$

$$d^2\Psi/dt^2 = kF(T)\cos(x_3)x_3^{\cdot 2} + (V + kF(T)\sin x_3)x_3^{\cdot\cdot}. \qquad (3.11)$$

Производная $\ddot{x}$ может быть выражена из уравнения (3.2) в виде

$$x_3^{\cdot\cdot} = (V + kF(T)\sin x_3 + 0.5x_3^{\cdot 2}pk\sin 2x_3)/(1 - pk\sin^2 x_3). \qquad (3.12)$$

Используя соотношения (3.8)–(3.12), докажем утверждение леммы. Положим, для определенности, $V>0$, $\Delta t>0$, $x_3^{\cdot}(t_0)<0$. В силу непрерывности $x_3^{\cdot}(t)$ на некотором конечном промежутке времени $[t_0; t')$ имеет место неравенство

$$x_3^{\cdot}(t)<0 \qquad (3.13)$$

Кроме того, как было отмечено выше, $|U_2(t, T)| = |F(T)| = |q_2(T)| \to 0$ при $T\to\infty$ и, следовательно, начиная с некоторого достаточно большого T, выполнено неравенство

$$|kF(T)|<|V|. \qquad (3.14)$$

В силу соотношений (3.13), (3.14) производная (3.10) отрицательна при $t\in[t_0; t')$. Монотонно убывая, функция $\Psi(x_3(t), V, F(T))$ достигает нулевого значения за конечное время, так как при малых $x^{\cdot}$ и достаточно больших T, из (3.9), (3.11), (3.12) следует ограниченность снизу абсолютных величин $|x_3^{\cdot\cdot}|$, $|d^2\Psi/dt^2|$, и совпадение знаков $x_3^{\cdot\cdot}$ и V. Одновременно с $\Psi(x_3(t), V, F(T))$ обращается в нуль $x_3^{\cdot}(t)$. Подобным же образом доказывается возрастание $x_3^{\cdot}(t)$ за конечное время от нуля до конечного положительного значения. При дальнейшем увеличении t скорость $x_3^{\cdot}(t)$, согласно (3.8), (3.9), растет неограниченно. Очевидно, одновременно неограниченно возрастает и значение координаты $x_3(t)$.

Аналогично утверждение леммы доказывается при иных комбинациях знаков параметров изохроны и начальных условий.

Используя результаты предварительного рассмотрения, докажем утверждение.

Утверждение 3.1. Для произвольных действительных постоянных x_{0k}, x_{Tk}, $x_{0k}^{\cdot}$, $x_{Tk}^{\cdot}$, $k=1, 2, 3$, кроме случаев выполнения условий (3.6) при $k=2$, существует постоянная $0<T_0<\infty$, такая, что для всех $T\geqslant T_0$ задача У имеет решение.

Доказательство. Координаты произвольной точки изохроны связаны соотношением (3.8). Каждому значению параметра $V\in[-\alpha; \alpha]$ отвечает некоторое значение абсциссы $x_3(V, \Delta t, T)$ точки изохроны и соответствующее значение функции $\Psi(x_3(V, \Delta t, T), V, F(T)) = \Psi(V, \Delta t, T)$ (см. доказательство леммы). Используя ограничения на величины параметров V и $F(T)$, а также учитывая, что $x_3(t_0)$ изменяется в пределах $(-\pi; \pi]$, из (3.8) выводим оценку модуля приращения функции $\Psi = \Psi(V, \Delta t, T)$, происходящего при переходе от одной точки изохроны к другой:

$$|\Psi' - \Psi''| \leqslant 2(\alpha(2\pi + |x' - x''|) + 2k). \qquad (3.15)$$

Здесь x', x'' — абсциссы точек изохроны, отвечающих значениям $V=V'$, $V=V''$, а Ψ', Ψ'' — соответствующие значения функции $\Psi=\Psi(V, \Delta t, T)$.

В качестве постоянной T_0 может быть выбрано произвольное время процесса управления $T\geqslant T_{42}$ (см. п. 2) и такое, при котором рассматриваемая пара изохрон удовлетворяет условиям:

$$x^{\cdot}(a, \Delta t, T)x^{\cdot}(-\alpha, \Delta t, T)<0, \;\; \Psi(\pm\alpha, \Delta t, T)\geqslant 4(2\pi\alpha + k), \;\; |F(T)|\leqslant\alpha/k. \qquad (3.16)$$

Существование такого времени процесса управления T, при котором неравенства (3.16) удовлетворены, следует из соотношений $|q_2(T)| \underset{T}{\longrightarrow} 0$, $|\Delta t(T)| \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ рассмотренных выше, и утверждения леммы.

Два первых неравенства (3.16), оценка (3.15) и непрерывность координат точки изохроны по параметру V устанавливают факт пересечения изохрон. Третье условие (3.16) совместно с неравенством $T_0 \geqslant T_{42}$ позволяет утверждать, что условия (3.16) будут выполняться для всякого $T \geqslant T_0$. Последнее вытекает из монотонного убывания функции $q^{\cdot}(T)$ (утверждение 2.1) и монотонного возрастания функции $\Psi(V, \Delta t(T), T)$ по T для $Vx_3(V, \Delta t, T) > 0$, $|V| = \alpha$, $T \geqslant T_{42}$ (см. доказательство леммы). Утверждение 3.1 доказано.

Замечание. При выполнении условий (3.6) для $k=2$ утверждение 3.1, вообще говоря, неверно. Однако оно останется в силе, если изменить вид компоненты U_3 класса управлений (3.5) на

$$U_3(\tau) = \begin{cases} V, & 0 \leqslant \tau \leqslant T/2, \quad |V| \leqslant \alpha \\ V', & T/2 < \tau \leqslant T, \quad |V'| \leqslant \alpha. \end{cases}$$

Несложно убедиться, что доказательство утверждения 3.1 при этом не изменится.

Утверждение 3.1 справедливо в классе управлений (3.5), если условия (3.6) выполнены одновременно для $k=2$ и $k=3$. При этом единственной изохроне, начиная с некоторого достаточно большого времени T, принадлежит точка $(x_{T3}, x_{T3}^{\cdot})$.

Докажем последнее утверждение. Согласно (3.8) и доказательству леммы, при произвольном фиксированном $V \in [-\alpha; \alpha]$, $Vx_3(t_0) < 0$, и достаточно большом значении T изображающая точка уравнения (3.2) с управлением (3.5) за конечное время $t(V, T)$ переместится из начальной точки $(x_{03}, x_{03}^{\cdot})$ в точку, совпадающую с конечной точкой $(x_{03}, -x_{03}^{\cdot}) = (x_{T3}, x_{T3}^{\cdot})$. Как следует из (3.8), время перехода может быть вычислено как интеграл

$$t(V, T) = 2 \operatorname{sign} x_{30}^{\cdot} \int_{x_{03}}^{x_3^0} \sqrt{(1 - pk \sin \xi) / \Psi(\xi, V, F(T))}\, d\xi, \tag{3.17}$$

где x_3^0 — абсцисса первой, следующей за $(x_{03}, x_{03}^{\cdot})$ точки траектории, в которой ордината обращается в нуль, x_3^0 — это корень уравнения

$$\Psi(\xi, V, F(T)) = 0 \tag{3.18}$$

Интеграл (3.17) имеет особенность в точке $\xi = x_3^0$, устранимую, если $\partial\Psi/\partial\xi\,(x_3^0) \neq 0$ и неустранимую в противном случае.

Для произвольного фиксированного $V \in [-\alpha; \alpha]$ и достаточно большого T, $t(V, T) \leqslant T$. Действительно, разлагая подынтегральную функцию из (3.17) в ряд Тейлора в окрестности особой точки, можно доказать, что функция $t(V, T)$ ограничена сверху при $T \to \infty$.

Исследуя уравнение (3.18) графически, несложно заметить, что при достаточно большом значении T, непрерывно изменяя V в промежутке $(0; -|F(T)| \operatorname{sign} x_{30}^{\cdot})$, можно многократно непрерывно заполнить промежуток $(-\pi; \pi]$ корнями уравнения (3.18). При этом $x_3^m = -\arcsin(Vk^{-1}F^{-1})$, являющееся корнем уравнения $\partial\Psi/\partial\xi = 0$, непрерывно изменяется внутри промежутка $(-\pi; \pi]$. Следовательно, существует $V' \in (0; -|F(T)| \operatorname{sign} x_{30}^{\cdot})$, при котором $x_3^0 = x_3^m$. Для значений V, стремящихся к $V^{\cdot}$, в силу непрерывности функции $t(V, T)$ по V, существует $V^* \in [-\alpha; \alpha]$, такое, что $t(V^*, T) = T$. Доказательство завершено.

Используя утверждение 2.1 и 3.1, а также построенный в п. 2 алгоритм решения задачи Л, предложим следующий алгоритм решения задачи У.

Шаг 1 — *Шаг* 5. Выполняем соответственно шаги 1—5 алгоритма, описанного в п. 2, для $k=1, 2$. Получаем значение времени T процесса управления и соответствующие ему значения параметров τ_1, q_1, τ_2, q_2 законов управления вида (2.6) для задач A_1 и A_2.

Если условие (3.6) выполнено для $k=2$ и нарушается для $k=3$, то полагаем $\tau_2=T/2$.

Шаг 6. Если для нового значения времени процесса управления T параметр q_2 изменил знак, либо если T является начальным значением времени процесса управления, выполняем шаг 7. В противном случае переходим к шагу 8.

Шаг 7. По известным T, τ_2, q_2, для значений V и V', равных поочередно $-\alpha$, 0, α, интегрируем уравнение (3.2): из начальной точки (2.2) при $k=3$ на участке $\tau\in[0, \tau_2]$ в прямом времени, а из конечной точки (2.3) при $k=3$ на участке $\tau\in[T; \tau_2]$ в обратном времени. Из девяти возможных пар рассматриваемых значений параметров V, V' в качестве начального приближения выбираем ту пару, для которой величина

$$D=(x_3-x_3')^2+(x_3^{\boldsymbol{\cdot}}-x_3'')^2 \tag{3.19}$$

минимальна. В (3.19) $(x_3, x_3^{\boldsymbol{\cdot}})$, $(x_3^{\boldsymbol{\cdot}}, x_3'')$ — это фазовые координаты положения изображающей точки уравнения (3.2) в момент времени $\tau=\tau_2$ соответственно на фазовой траектории, исходящей из начальной точки (2.2) при $k=3$ в прямом времени, и на фазовой траектории, исходящей из конечной точки (2.3) при $k=3$ в обратном времени.

Шаг 8. Выполняем процедуру минимизации функции

$$R(T, V, V')=k_1(x_3-x_3')^2+k_2(x_3^{\boldsymbol{\cdot}}-x_3'')^2+k_3T, \quad k_i>0, \quad i=1, 2, 3 \tag{3.20}$$

по переменным T, V, V' с ограничениями: $T\in\theta_1\cap\theta_2$, $|U_3|\leqslant a$, и дополнительными условиями

$$\begin{cases} |x_3-x_3'|<\varepsilon \\ |x_3^{\boldsymbol{\cdot}}-x_3''|<\varepsilon. \end{cases} \tag{3.21}$$

При изменении переменной T управление передается на шаг 3. Числовые коэффициенты k_1, k_2, k_3 в (3.20), а также точность, задаваемую в критерии остановки минимизационной процедуры, выбираем в зависимости от требуемой точности решения. Если при остановке процедуры минимизации дополнительные условия (3.21) не выполнены, то полагаем $T=T+h$, где h — заданная конечная положительная постоянная, и переходим к шагу 3.

В результате выполнения описанного алгоритма получаем значения параметров q_1, q_2, V, V', τ_1, τ_2, T, которые в соответствии с формулами (3.5) определяют решение задачи У.

Замечание. Алгоритм построен таким образом, что он практически дает минимальное значение времени T в классе управлений (3.5), хотя, конечно, не гарантирует получения управления, строго оптимального по быстродействию.

4. Результаты численного решения задачи. Разработанный в п. 3 алгоритм решения задачи управления движением портального робота был реализован на ЭВМ ЕС 1060. Численные расчеты подтвердили эффективность алгоритма. Начальное и конечное фазовые состояния для рассматриваемой механической системы в N-м варианте задачи У задавались данными N-й строки табл. 1 ($N=1, 2, \ldots, 8$). Во всех вариантах линейные и массовые характеристики робота, а также величины ограничений на управления принимались равными: $M=400$ кг, $m_2=200$ кг, $m_3=100$ кг, $J=49.6$ кг·м², $l=0.68$ м, $Q_0=500$ Н, $F_0=400$ Н, $U_0=27.8$ Н·м. Вычисления проводились при $k_1=k_2=1$, $k_3=0.01$, $h=1$ с, $\varepsilon=10^{-4}$. Для минимизации функции невязки (3.21) использовалась процедура, основанная на модифицированном методе Хука — Дживса [15]. Решение задачи У в N-м варианте определяется формулами (3.5) и данными N-й строки табл. 2. Численные значения величин, приведенных в табл. 1, 2, даны в системе СИ.

Таблица 1

№	x_0	$\dot{x}_0$	x_T	$\dot{x}_T$	y_0	$\dot{y}_0$	y_T	$\dot{y}_T$	φ_0	$\dot{\varphi}_0$	φ_T	φ_T
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	π	0
2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	$\pi/2$	0
3	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	$\pi/3$	0
4	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	$\pi/4$	0
5	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	π	1
6	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	π	0
7	0	1	0	0	0	1	0	−1	0	1	0	−1
8	0	1	1	0	0	1	1	2	0	1	π	2

Таблица 2

№	q_1	τ_1	q_2	τ_2	V	V'	T	T_q
1	29.20	2.335	60.50	2.335	27.80	−27.8	4.670	1.625
2	63.60	1.587	164.5	1.587	27.80	−2.68	3.174	1.822
3	100.8	1.260	288.0	1.260	27.80	2.330	2.520	1.913
4	137.2	1.080	407.5	1.080	27.80	3.470	2.160	1.950
5	−57.2	3.855	−201.	1.210	27.80	−15.9	4.891	1.154
6	−57.2	3.855	−201.	3.681	15.92	27.80	4.891	1.154
7	−160.	2.000	−500.	2.000	−27.8	−27.8	2.000	2.000
8	153.6	2.344	−500.	2.355	23.66	−22.2	5.713	5.713

Приведем анализ полученных результатов. Варианты 1—4 задачи У иллюстрируют перевод рассматриваемой системы из заданного начального состояния покоя в заданное конечное состояние покоя. Для этих вариантов имеет место соотношение $\tau_1=\tau_2=T/2$, что является следствием симметричности фазовых траекторий уравнений ((2.1), $k=1, 2$). С уменьшением величины задаваемого углового перемещения время процесса управления T приближается к нижней оценке времени быстродействия T_q. При этом относительная разность $(T-T_q)/T_q$ монотонно уменьшается от 187% в варианте 1 до 11% в варианте 4 и, очевидно, обратится в нуль начиная с некоторого конечного углового перемещения $x_{T3}-x_{03}$. Варианты 5, 6 иллюстрируют случаи разгона и торможения. Анализ фазовых траекторий задач A_1 и A_2 показывает, что вследствие взаимной симметричности краевых условий (см. табл. 1) в приведенных вариантах должны выполняться соотношения $T^5=T^6=T$, $V^5=-V'^6$, $V'^5=-V^6$, $q_1{}^5=q_1{}^6$, $q_2{}^5=q_2{}^6$, $\tau_1{}^5=T-\tau_1{}^6$, $\tau_2{}^5=T-\tau_2{}^6$, что подтверждается результатами численных расчетов (табл. 2). В рассматриваемых вариантах присутствуют участки реверсного движения по x_1 и x_2, что механически соответствует необходимости создания дополнительного участка разгона, так как первоначально задаваемый участок разгона в силу ограничений (2.4) при $k=1, 2$ набор заданной скорости обеспечить не может. Варианты 7, 8 демонстрируют работоспособность алгоритма для краевых условий с ненулевыми скоростями в начале и в конце процесса управления. В варианте 7 вследствие симметрии краевых условий в плоскостях $(x_1, x_1{}^{\bullet})$, $(x_2, x_2{}^{\bullet})$, $\tau_1=\tau_2=T$. В варианте 8 по тем же причинам, что и в 5, 6, присутствуют реверсные движения по x_1, x_2. Управления, полученные в вариантах 7, 8, являются оптимальными по быстродействию, что следует из равенства $T=T_q$ (табл. 2). Это подтверждает возможность решения задач быстродействия рассматриваемой нелинейной механической системы при помощи описанного в п. 3 алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kahn M. E., Roth B.* The near minimum-time control of openloop articulated kinematic chains // Trans. ASME J. Dynamic Syst. Measurem. and Control. 1971. V. 91. № 3.

2. *Дунская Н. В., Пятницкий Е. С.* Адаптивное управление манипулятором (алгоритм обучения движению) // Автоматика и телемеханика. 1983. № 2.
3. *Хейман Б., Лоозе Х., Шмидт К. Д. и др.* Динамика и оптимальное управление роботами-манипуляторами // Успехи механики. 1984. Т. 7. Вып. 4.
4. *Marinov P., Kiriazov P.* Synthesis of time-optimal control for manipulator dynamics // Теоретика и приложна механика. 1984. № 1.
5. *Аветисян В. Б., Болотник Н. Н., Черноусько Ф. Л.* Оптимальные программные движения двузвенного манипулятора // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 3.
6. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н., Каплунов А. А.* Некоторые режимы управления промышленными манипуляторами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 6.
7. *Носов В. Н., Троицкий А. В., Троицкий В. А.* Оптимальные задачи кинематики манипуляторов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 4.
8. *Осипов С. Н., Формальский А. М.* Задача о быстрейшем повороте манипулятора // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6.
9. *Борисов В. Ф., Зеликин М. И.* Режимы с учащающимися переключениями в задаче управления роботом // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6.
10. *Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г.* Манипуляционные роботы. Динамика, управление, оптимизация. М.: Наука, 1989.
11. *Бербюк В. Е.* Динамика и оптимизация робототехнических систем. Киев.: Наук. думка, 1989.
12. *Болотник Н. Н., Черноусько Ф. Л.* Оптимизация управления манипуляционными роботами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 1.
13. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В. и др.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
14. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.
15. *Банди Б.* Методы оптимизации. Вводный курс: Пер. с англ. В. Шихеевой/Под ред. В. А. Волынского. М.: Радио и связь, 1988.

Львов

Поступила в редакцию
21.VI.1990

после доработки
27.VIII.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УДК 521.8

А. Т. ЗАРЕМБА, С. В. ЗЕГЖДА, В. А. КОНОПЛЕВ,
А. Б. ЛЕВИН

СИНТЕЗ ПРОГРАММНЫХ ДВИЖЕНИЙ РОБОТОВ НА ОСНОВЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ

Разработаны алгоритмы синтеза программных движений (ПД) многозвенных манипуляторов, отслеживающих произвольный контур, образованный пересечением подвижных гиперповерхностей в трехмерном пространстве. В основу алгоритмов положены решения обратных кинематических задач о скоростях или положении и соотношения, обобщающие формулы Френс – Серре для случая нестационарной параметризации контура. В случае кинематической избыточности механизма синтезируется оптимальное ПД из условия минимума мгновенного значения кинетической энергии.

Введение. При разработке программного обеспечения робототехнических сварочных комплексов возникает задача отслеживания сложных пространственных контуров, образуемых пересечением свариваемых поверхностей. При этом необходимо поддерживать заданную скорость перемещения рабочего органа (РО) манипулятора электрода и его ориентацию в подвижном триэдре, связанном с контуром. Пространственное движение контура считается заданным и осуществляется 2–3-степенным манипулятором изделия.

Задача отслеживания неподвижного в пространстве контура, который определяется набором точек в декартовом пространстве, рассматривается в [1, 2]. Используется линейная или круговая интерполяция декартовой траектории, что требует задания значительного числа опорных точек и решения обратной кинематической задачи (ОКЗ) о положении в режиме реального времени. В [3] строится программное движение (ПД) робота на основе ОКЗ о положении для случая стационарного контура, причем связь длины дуги с временем устанавливается при помощи квадратур, которые существуют только в ряде случаев. В [4] построены оптимальные и квазиоптимальные по быстродействию режимы управления транспортными перемещениями манипуляторов. Синтез ПД на основе ОКЗ о положении и кубической сплайн-интерполяции с граничными условиями на первые и вторые производные в начале и конце траектории производится в [5].

В работе исследуется задача отслеживания контура, определяемого пересечением подвижных поверхностей общего вида, с регулируемой скоростью перемещения электрода и его ориентацией относительно контура. Рассматриваемая задача не является традиционной задачей кинематики роботов, так как перемещение и ориентация РО не известна, а определяется только в результате построения ПД в пространстве обобщенных координат. Для ее решения получены новые выражения, обобщающие формулы Френе – Серре для случая нестационарной параметризации контура. Для описания кинематики манипуляционных роботов используется агрегативный подход [6, 7], который позволяет эффективно формировать модели механики многозвенных технических систем. Параметризация ПД при помощи кубических сплайнов [8] значительно сокращает число опорных точек траектории и позволяет воспроизводить контур при управлении

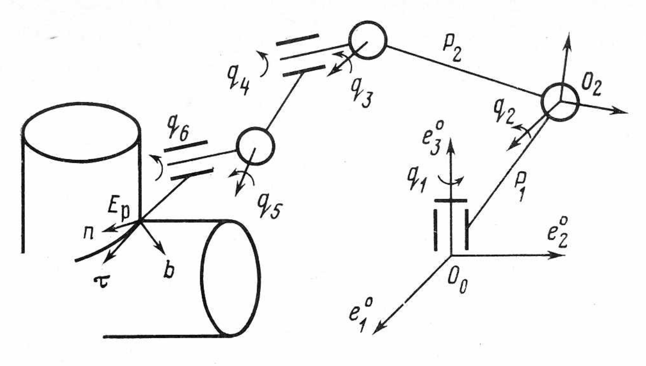


Рис. 1

роботом в режиме реального времени. Приводятся результаты численного моделирования.

1. Постановка задачи и основные кинематические соотношения. Рассматривается робототехнический сварочный комплекс (рис. 1), состоящий из манипулятора электрода и манипулятора изделия — поворотного стола, обеспечивающего заданное пространственное перемещение свариваемых поверхностей. Манипулятор электрода выполнен в виде открытой кинематической цепи $P_0, \ldots, P_n$, отдельные звенья которой соединены между собой вращательными или поступательными кинематическими парами пятого класса.

Требуется синтезировать ПД манипулятора электрода, обеспечивающее заданную скорость сварки и ориентацию электрода в подвижном трехграннике, связанном с контуром, при известном перемещении свариваемых поверхностей.

Для описания системы с каждым звеном кинематической цепи связывается система координат $E_i=(O_i, [\mathbf{e}^i])$, где O_i — начало системы координат, $[\mathbf{e}^i]=(\mathbf{e}_1{}^i, \mathbf{e}_2{}^i, \mathbf{e}_3{}^i)$ — ортонормированный базис, причем одна из осей базиса совпадает с осью кинематической пары, а точка O_i с ее центром $(i=\overline{1, n})$. С РО робота связана система координат E_{n+1}, причем точка O_{n+1} совпадает с характерной точкой РО, а второй орт направлен вдоль симметрии РО. Номер оси системы координат, совпадающий с осью кинематической пары, определяется целочисленным параметром $n_i \in \overline{1, 6}$, причем для поступательной пары выполнено $n_i \in \overline{1, 3}$, а для вращательной $n_i \in \overline{4, 6}$. Относительное положение двух соседних систем координат E_{i-1} и E_i задается шестеркой чисел [6, 7]

$$\mathbf{s}^i=\mathbf{O}_i^{i-1,\,u}, \begin{cases} u=i & \text{при} \quad n_i \in \overline{1,3}, \\ u=i-1 & \text{при} \quad n_i \in \overline{4,6} \end{cases} \quad \theta^i=\{\theta_4{}^l, \theta_5{}^i, \theta_6{}^i\}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{s}^i=\mathbf{O}_i^{i-1,u}$ — вектор (1×3) линейного сдвига точки O_i относительно O_{i-1}, который для поступательной пары определен в $E_i(u=i)$, а для вращательной в $E_{i-1}(u=i-1)$; углы $\theta_j{}^i$ задают матрицу ориентации ортов базиса $[\mathbf{e}^i]$ относительно $[\mathbf{e}^{i-1}]$ $(j=\overline{4, 6})$. Из шести величин $\mathbf{s}^i$, $\theta_j{}^i$ $(j=\overline{4, 6})$ одна с номером n_i является обобщенной координатой i-й кинематической пары, а остальные — постоянные линейные или угловые конструктивные параметры звена P_{i-1}.

Определяя очередность выполнения сдвигов и поворотов при переходе из E_{i-1} в E_i согласно [10], дифференцированием (1.1) находится простое представление вектора квазискоростей $\mathbf{V}_i^{i-1,i}$ двух соседних звеньев цепи

$$\mathbf{V}_i^{i-1,i}=\mathbf{f}^i q_i^{\bullet}, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{V}_k^{jk}=\|\mathbf{v}_k^{jkT}, \boldsymbol{\omega}^{kT}\|^T$ — вектор (6×1) квазискоростей звена P_k относительно E_j в осях E_k, $\mathbf{f}^i$ — единичный вектор (6×1) с единицей на месте с номером n_i, q_i — обобщенная координата i-й кинематической пары $(i=\overline{1, n})$.

Вектор квазискоростей произвольного звена цепи относительно заданной системы координат E_j определяется рекуррентным соотношением [6, 7]

$$\mathbf{V}_k^{jk}=L_k^{k-1T}\,\mathbf{V}_{k-1}^{jk-1}+\mathbf{V}_k^{k-1,k}\ . \qquad (1.3)$$

Здесь L_k^i — блочная матрица (6×6) преобразования координат скользящего вектора при переходе из E_i в E_k.

Пошаговыми вычислениями (1.3) с учетом (1.2) находятся уравнения кинематики многозвенной цепи в явной форме

$$\mathbf{V}_k^{jk}=\sum_{i=j+1}^{k} L_k^{iT}\mathbf{f}^i g_i^{\cdot},$$

$$\mathbf{V}_k^{jk*}=\sum_{i=j+1}^{k}(L_k^{iT}\mathbf{f}^i q_i^{\cdot\cdot}+\Phi_k^{ikT}\,L_k^{iT}\mathbf{f}^i q_i^{\cdot}). \qquad (1.4)$$

Здесь Φ_k^{ik} — блочная матрица (6×6), порожденная вектором $\mathbf{V}_k^{ik}$, второе равенство (1.4) получается дифференцированием первого, звездочка означает локальную производную.

Вводится в рассмотрение шестимерный вектор $\mathbf{l}_k^i$, который равен единичному орту $\mathbf{f}^i$, приведенному к осям связанной со звеном P_k системы координат E_k

$$\mathbf{l}_k^i=L_k^{iT}\mathbf{f}^i \text{ при } i\leqslant k;\quad \mathbf{l}_k^i\equiv0 \text{ при } i>k. \qquad (1.5)$$

С учетом (1.5) кинематические соотношения (1.4) преобразуются к виду

$$\mathbf{V}_k^{jk}=\sum_{i=j+1}^{k}\mathbf{l}_k^i q_i^{\cdot}\quad k>j,$$

$$\mathbf{V}_k^{jk*}=\sum_{i=j+1}^{k}\sum_{s=i+1}^{k}(\mathbf{l}_k^i q_i^{\cdot\cdot}+\langle\mathbf{l}_k^s\rangle^T\mathbf{l}_k^i q_i^{\cdot}q_s^{\cdot}), \qquad (1.6)$$

где символом $\langle\mathbf{f}^s\rangle$ обозначена [10] матрица (6×6), блоками которой являются кососимметричные матрицы (3×3), порожденные первыми и вторыми тремя компонентами шестимерного вектора $\mathbf{f}^s$. Отметим, что вектор $\mathbf{l}_k^i$ равен (1.6) частной производной вектора $\mathbf{V}_k^{jk}$($\mathbf{V}$) по обобщенной скорости $q_i^{\cdot}$ (ускорению $q_i^{\cdot\cdot}$) i-й кинематической пары

$$\mathbf{l}_k^i=\frac{\partial\mathbf{V}_k^{jk}}{\partial q_i^{\cdot}}=\frac{\partial\mathbf{V}_k^{jk*}}{\partial q_i^{\cdot\cdot}}\quad k>j.$$

Вычисление векторов $\mathbf{l}_k^i$, определяющих кинематические соотношения (1.6) многозвенной цепи, производится прямой прогонкой от основания к РО

$$\mathbf{l}_k^i=L_k^{k-1T}\,\mathbf{l}_{k-1}^i,\quad k=\overline{2, n},\quad i=1, k-1, \qquad (1.7)$$

учитывая начальные условия $\mathbf{l}_i^i=\mathbf{f}^i$.

Соотношения (1.3)—(1.7) определяют вектор квазискоростей РО манипулятора и его локальную производную через обобщенные координаты, скорости и ускорения механизма $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}^{\cdot}$, $\mathbf{q}^{\cdot\cdot}$.

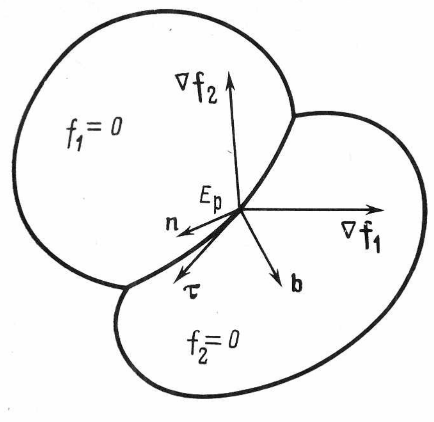


Рис. 2

2. Определение движения контура. Предполагается, что отслеживаемый РО контур определяется пересечением подвижных гиперповерхностей общего вида

$$f_i(\mathbf{r}, t)=0 \quad i=\overline{1, 3}. \tag{2.1}$$

Здесь явный вид функций f_i ($i=1, 2$) определяется кинематикой и движением поворотного стола, формой свариваемых поверхностей, а третье условие (2.1) определяет текущую точку контура.

Для синтеза ПД необходимо определить движение подвижного триэдра [9] пространственной кривой (2.1). Вначале вычисляется единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ касательной к контуру (рис. 2)

$$\boldsymbol{\tau}=\nabla \mathbf{f}_1 \times \nabla \mathbf{f}_2 / |\nabla \mathbf{f}_1 \times \nabla \mathbf{f}_2|, \tag{2.2}$$

где $\nabla \mathbf{f}_i$ — градиент функций (2.1) ($i=1, 2$). В случае обращения в нуль векторного произведения (2.2), что соответствует касанию гиперповерхностей (2.1), необходимо изменить одну из функций, определяющих контур.

Составляющие вектора τ являются производными радиус-вектора кривой (2.1) по длине дуги

$$\tau(\mathbf{r}(s), t)=\mathbf{r}_s'(s, t).$$

Орты $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ пространственной кривой (2.1) определяются дифференцированием вектора $\boldsymbol{\tau}$ [9]

$$\mathbf{n}=\rho\boldsymbol{\tau}_s', \quad \rho^{-1}=|\boldsymbol{\tau}_s'|, \quad \mathbf{b}=\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{n}. \tag{2.3}$$

Для производных ортов $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ справедливы следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau}_{sss}'''=-\boldsymbol{\tau}_s'^2, \quad \boldsymbol{\tau}\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial t}=\mathbf{n}\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial t}=\mathbf{b}\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial t}\mathbf{n}=-\frac{\partial n}{\partial t}\boldsymbol{\tau}, \quad \frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial t}\mathbf{b}=-\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}\boldsymbol{\tau}, \quad \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial t}\mathbf{b}=-\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}\mathbf{n}, \tag{2.4}$$

которые доказываются последовательным дифференцированием по времени равенств $\boldsymbol{\tau}^2=\mathbf{n}^2=\mathbf{b}^2=1$ и $\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}=\boldsymbol{\tau}\mathbf{b}=\mathbf{n}\mathbf{b}=0$.

Учитывая (2.4), дифференцированием выражений (2.2), (2.3) находятся соотношения, обобщающие формулы Френе — Серре для случая нестационарной параметризации контура

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}=\mathbf{n}\dot{s}/\rho+\frac{\partial\boldsymbol{\tau}}{\partial t}, \quad \frac{\partial\mathbf{n}}{dt}=-(\boldsymbol{\tau}/\rho+\mathbf{b}/T)\dot{s}+\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial t},$$
$$\frac{d\mathbf{b}}{dt}=-\mathbf{n}\dot{s}/T+\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}, \quad T^{-1}=\rho^2[\mathbf{r}_s'\mathbf{r}_{ss}''\mathbf{r}_{sss}''']. \tag{2.5}$$

Подстановкой выражений (2.5) в кинематическое уравнение Пуассона [11]

$$\langle \boldsymbol{\omega}_p{}^0 \rangle^p = C_p{}^{0\mathrm{T}} \dot{C}_p{}^0,$$

где $C_p{}^0 = \|\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\|$ — матрица (3×3) направляющих косинусов ортов, символом $\langle \boldsymbol{\omega}_p{}^{0p} \rangle$ обозначается кососимметрическая матрица, порожденная вектором $\boldsymbol{\omega}_p{}^{0p}$, находятся выражения для угловой скорости триэдра

$$\boldsymbol{\omega}_p{}^{op} = \left(\dot{s}/T + \mathbf{b}\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t}, -\mathbf{b}\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t}, \quad \dot{s}/\rho + \mathbf{n}\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} \right). \tag{2.6}$$

Для определения линейной скорости $\mathbf{v}_p{}^{0p}$ перемещения вершины триэдра дифференцируются равенства (2.1)

$$\nabla \mathbf{f}_i \mathbf{v}_p{}^{00} + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0. \tag{2.7}$$

Подстановкой в (2.7) выражения

$$\mathbf{v}_p{}^{00} = \sum_{j=1}^{3} \nabla \mathbf{f}_j \alpha_j$$

находится система линейных уравнений

$$(\nabla \mathbf{f}_i \nabla \mathbf{f}_j)\alpha_j = -\frac{\partial f_i}{\partial t} \quad i, j = \overline{1, 3}, \tag{2.8}$$

из которой определяются коэффициенты разложения вектора $\mathbf{v}_p{}^{00}$ по базису $\nabla \mathbf{f}_i$ $(i=\overline{1, 3})$. Для упрощения дальнейшего изложения предполагается, что вектор $\nabla \mathbf{f}_3$ ортогонален векторам $\nabla \mathbf{f}_i$ $(i=1, 2)$. Выполнение данного условия достигается соответствующим выбором функции f_3 (2.1), определяющей текущую точку контура. В результате решения системы (2.8) находятся составляющие вектора $\mathbf{v}_p{}^{00}$ в базисе $\nabla \mathbf{f}_i$ $(i=\overline{1, 3})$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left[-\frac{\partial f_1}{\partial t}(\nabla \mathbf{f}_2 \nabla \mathbf{f}_2) + \frac{\partial f_2}{\partial t}(\nabla \mathbf{f}_1 \nabla \mathbf{f}_2) \right] \Delta^{-1}, \\ \alpha_2 &= \left[-\frac{\partial f_2}{\partial t}(\nabla \mathbf{f}_1 \nabla \mathbf{f}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial t}(\nabla \mathbf{f}_2 \nabla \mathbf{f}_1) \right] \Delta^{-1}, \\ \alpha_3 &= -\frac{\partial f_3}{\partial t} \Big/ |\nabla \mathbf{f}_3|^2, \quad \Delta = |\nabla \mathbf{f}_1 \times \nabla \mathbf{f}_2|^2. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Выражение для вектора $\mathbf{v}_p{}^{00}$ в подвижном триэдре имеет вид

$$\mathbf{v}_p{}^{00} = \alpha_\tau \cdot \boldsymbol{\tau} + \alpha_n \cdot \mathbf{n} + \alpha_b \cdot \mathbf{b}, \quad \alpha_\tau = -\frac{\partial f_3}{\partial t} \Big/ |\nabla \mathbf{f}_3|, \quad \alpha_n = \alpha_1(\nabla \mathbf{f}_1 \mathbf{n}) + \alpha_2(\nabla \mathbf{f}_2 \mathbf{n}),$$

$$\alpha_b = \alpha_1(\nabla \mathbf{f}_1 \mathbf{b}) + \alpha_2(\nabla \mathbf{f}_2 \mathbf{b}). \tag{2.10}$$

Соотношения (2.6), (2.9)—(2.10) определяют движение триэдра для общего случая (2.1) нестационарной параметризации контура.

Формулы (2.6), (2.9)—(2.10) упрощаются, если задано движение системы кординат $E_t = (O_t, [\mathbf{e}^t])$, связанной с последним звеном поворотного стола. Вектор квазискоростей $\mathbf{V}_t{}^{0t}$ системы E_t можно определять по формулам (1.6) аналогично вектору квазискоростей РО манипулятора.

В E_t первые два условия, определяющие контур, становятся стационарными

$$\tilde{f}_i(\mathbf{r}_p{}^{tt}) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{2.11}$$

а частная производная по времени функции $\tilde{f}_3(\mathbf{r}_p{}^{tt}, t)$ определяется равенством

$$\frac{\partial \tilde{f}_3(\mathbf{r}_p{}^{tt}, t)}{\partial t} = -\nabla\tilde{\mathbf{f}}_3\boldsymbol{\tau}^0\dot{\mathbf{s}}. \tag{2.12}$$

Здесь $\mathbf{r}_p{}^{tt}$ — радиус-вектор точки контура в базисе $[\mathbf{e}^t]$, $\boldsymbol{\tau}^0$ — первый орт триэдра в E_0. Подстановкой в (2.11) выражения для вектора $\mathbf{r}_p{}^{tt}$ через радиус-вектор точки контура $\mathbf{r}_p{}^{00}$ в абсолютной системе координат

$$\mathbf{r}_p{}^{tt} = C_t{}^{0\mathrm{T}}(\mathbf{r}_p{}^{00} - \mathbf{O}_t{}^{00}) \tag{2.13}$$

находятся соотношения (2.1). Дифференцированием по времени (2.1), (2.11) с учетом (2.12) определяются частные производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}}[\dot{C}_t{}^{0\mathrm{T}}(\mathbf{r}_p{}^{00} - \mathbf{O}_t{}^{00}) - C_t{}^{0\mathrm{T}}\dot{\mathbf{O}}_t{}^{00}],$$

или, используя (2.13),

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = -\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} C_t{}^{0\mathrm{T}}[\langle\boldsymbol{\omega}_t{}^0\rangle^0\mathbf{r}_p{}^{t0} + \mathbf{v}_t{}^{00}], \quad i=1, 2. \tag{2.14}$$

Для третьего условия, учитывая (2.12), в квадратных скобках (2.14) добавляется слагаемое $\boldsymbol{\tau}^0 s^{\cdot}$. Подстановкой (2.14) в выражения (2.7)—(2.10) находится линейная скорость $\mathbf{v}_p{}^{0p}$ подвижного триэдра

$$\mathbf{v}_p{}^{0p} = C_p{}^{t\mathrm{T}}(\langle\boldsymbol{\omega}_t{}^0\rangle^t\mathbf{r}_p{}^{tt} + \mathbf{v}_t{}^{0t}) + \boldsymbol{\tau}^p s^{\cdot}. \tag{2.15}$$

Для нахождения угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_p{}^{0p}$ в (2.6) подставляются выражения для частных производных ортов по времени, которые определяются вращением базиса $[\mathbf{e}^t]$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = \langle\boldsymbol{\omega}_p{}^0\rangle^p\boldsymbol{\tau}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \langle\boldsymbol{\omega}_p{}^0\rangle^p\mathbf{b}.$$

В результате находится выражение для

$$\boldsymbol{\omega}_p{}^{0p} = C_p{}^{t\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_t{}^{0t} + s^{\cdot}(T^{-1}, 0, \rho^{-1}). \tag{2.16}$$

Соотношения (2.15), (2.16) представляют формулы сложения относительной и переносной скоростей при движении триэдра.

3. Синтез ПД на основе ОКЗ для скоростей. Для построения ПД в пространстве обобщенных координат робота предполагается, что ориентация РО в осях триэдра сохраняется постоянной и приравниваются выражения для векторов квазискоростей РО (1.6) и триэдра (2.15), (2.16)

$$\mathbf{V}_p{}^{0p} = \Gamma'\mathbf{q}^{\cdot} \tag{3.1}$$

Здесь $\Gamma = L_p^{n+1\mathrm{T}}\Gamma$ (штрих в дальнейшем изложении опускается), элементы матрицы Γ размерности $(6\times n)$ равны $\gamma_{ij} = l^i_{n+1,j}$: постоянная матрица L_p^{n+1} определяет переход из E_{n+1} в систему координат триэдра.

Из (3.1) находится выражение для вектора $\mathbf{q}^{\cdot}$

$$\mathbf{q}^{\cdot} = \Gamma^+\mathbf{V}_p{}^{0p} + (E - \Gamma^+\Gamma)\mathbf{v}, \tag{3.2}$$

где $\Gamma^+ = \Gamma^\mathrm{T}(\Gamma\Gamma^\mathrm{T})^{-1}$ — псевдообратная матрица [12] для матрицы Γ, $\mathbf{v}$ — произвольный вектор $(n\times 1)$.

Отметим, что при $n<6$, когда число условий, определяющих движение, больше числа обобщенных координат манипулятора, на скоростях (3.2) достигается точная нижняя грань квадрата нормы невязки системы линейных уравнений (3.1).

В случае $n>6$ обобщенная скорость определена с точностью до произвольного вектора $(E-\Gamma^{+}\Gamma)\mathbf{v}$, который удовлетворяет однородной системе линейных уравнений (3.1).

Кинематическую избыточность системы при $n>6$ можно использовать для наложения дополнительных условий, например, требования минимума мгновенного значения кинетической энергии манипулятора

$$T={}^{1}/_{2}\mathbf{q}^{\cdot\mathrm{T}}A\mathbf{q}^{\cdot}\to\min, \qquad (3.3)$$

где элементы матрицы A определяются формулами [7]

$$a_{ij}=\sum_{k=\max(i,j)}^{n+1}\mathbf{l}_{k}^{i\mathrm{T}}\Theta_{k}^{k}\mathbf{l}_{k}^{j}. \qquad (3.4)$$

Здесь Θ_k^k — матрица (6×6) инерции Мизеса [6, 13]

$$\Theta_{k}^{k}=\left\|\begin{matrix} Em_{k} & \langle\mathbf{r}_{c}^{k}\rangle^{k\mathrm{T}}m_{k}\\ \langle\mathbf{r}_{c}^{k}\rangle^{k}m_{k} & \underline{\Theta}_{k}^{k}\end{matrix}\right\|, \qquad (3.5)$$

где m_k — масса, $\mathbf{r}_c^k$ — радиус-вектор центра масс, $\underline{\Theta}_k^k$ — матрица (3×3) тензора инерции звена P_k в системе координат E_k $(k=\overline{1, n})$.

Соотношения (3.4) приводятся к более экономным выражениям числового или символьного конструирования элементов матрицы [6]

$$a_{ij}=\mathbf{f}^{i\mathrm{T}}\Theta_{i}^{i}{}^{*}\mathbf{l}_{i}^{j}+\mathbf{l}_{j}^{i\mathrm{T}}\Theta_{j}^{j}\mathbf{f}^{j}(1-\delta_{ij}), \qquad (3.6)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, Θ_i^{i*} — эффективная матрица инерции (6×6) участка кинематической цепи начиная со звена P_i до РО в системе координат E_i.

Минимизацией квадратичной формы (3.3) при наличии линейных ограничений (3.1) в виде равенств находится выражение для вектора обобщенных скоростей манипулятора

$$\mathbf{q}_{\min}^{\cdot}=A^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}}(\Gamma A^{-1}\Gamma^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{V}_{p}^{0p}. \qquad (3.7)$$

Вместо выражения (3.3), коэффициенты которого зависят от обобщенных координат системы, можно минимизировать положительно определенную квадратичную форму P:

$$P={}^{1}/_{2}\sum_{i,j=1}^{n}q_{i}^{\cdot}q_{j}^{\cdot}p_{ij},$$

с постоянными коэффициентами p_{ij}, которая является оценкой кинетической энергии манипулятора. Отметим, что при $P=pE$, где E — единичная матрица $(n\times n)$, выражение (3.7) для $\mathbf{q}_{\min}$ совпадает с (3.2), в котором полагается $\mathbf{v}=0$.

Алгоритм 1 построения ПД роботов на основе ОКЗ для скоростей (3.2) или (3.7) состоит из следующих этапов:

a) определяется начальное значение вектора $\mathbf{q}_0$, соответствующее положению РО робота в начальной точке контура с требуемой ориентацией в триэдре E_p;

b) выбирается непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$, которая определяет движение электрода по шву, учитывающее технологические параметры сварки;

c) задается матрица ориентации электрода относительно шва;

d) интегрируется уравнение (3.2) или (3.7) и в узловых точках траектории t_j запоминаются значения обобщенных координат $q_{pi}^{j}(t_j)$ $(i=\overline{1, n}$, $j=\overline{1, l})$, где l — число узловых точек траектории.

e) методом кубической сплайн-интерполяции с граничными условиями на первые и вторые производные в начальный и конечный моменты

времени

$$q_{p_i}^{1\cdot}(t_1)=d_{i1}{}^1,\quad q_{p_i}^{1\cdot\cdot}(t_1)=d_{i2}{}^1,\quad q_{pi}^{l\cdot}(t_l)=d_{i1}{}^l,\quad q_{pi}^{l\cdot\cdot}(t_l)=d_{i2}{}^l \tag{3.8}$$

вычисляются значения $q_{pi}^{j\cdot}(t_j)$ в узловых точках траектории.

Граничные условия (3.8) обеспечивают плавное нарастание управляющих воздействий в степенях подвижности робота в момент начала и окончания движения.

Для выполнения условий (3.8) на первом и последнем интервалах времени вводятся [5] промежуточные узловые точки. Задача сплайн-интерполяции сводится к решению методом прогонки [8] трехдиагональной системы линейных уравнений. Значение сплайна и его первой производной в узловых точках траектории определяют программное движение $\mathbf{q}_p(t)$, для которого выполнены граничные условия (3.8). Вычисление значений $\mathbf{q}_p(t)$, $\mathbf{q}_p^{\cdot}(t)$, $\mathbf{q}_p^{\cdot\cdot}(t)$ в произвольный момент времени t по известным значениям q^j, $q^{j\cdot}$ в узловых точках производится по известным формулам [8].

Отметим, что выбор числа l узловых точек траектории определяется видом отслеживаемого контура и требуемой точностью позиционирования РО робота. Начальное значение $\mathbf{q}_0$ для вектора $\mathbf{q}$ находится решением ОКЗ о положении. Если решение ОКЗ о положении в аналитическом виде получить затруднительно, то строятся две вспомогательные траектории, причем на первой РО перемещается по прямой из произвольного положения в начальную точку контура, а на второй конечным поворотом устанавливается требуемая ориентация РО в триэдре E_p. Последняя точка вспомогательной траектории является искомым значением вектора $\mathbf{q}_0$.

Следовательно, рассмотренный алгоритм синтеза ПД на основе ОКЗ о скоростях позволяет отслеживать заданный подвижный контур (2.1) общего вида и является универсальным по отношению к кинематической схеме используемого манипулятора электрода. Параметризация ПД при помощи кубических сплайнов требует небольшого объема памяти для хранения опорных точек траектории и позволяет вычислить значения обобщенных координат и их производные при управлении роботом в режиме реального времени.

4. Синтез ПД на основе ОКЗ о положении. Предполагается, что линия пересечения гиперповерхностей (2.1) имеет представление

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s,\ t), \tag{4.1}$$

где за параметр принята длина дуги контура s. Выражения (4.1) известны в виде аналитических зависимостей, например, для прямой или дуги окружности. Подвижный триэдр, связанный с контуром, определяется формулами (2.3).

Пусть ориентация РО робота в триэдре E_p задана, а значение обобщенных координат $\mathbf{q}$ по известному положению и ориентации РО устанавливает решение ОКЗ о положении

$$\mathbf{q}=K^{-1}(\mathbf{O}_p{}^{0p},\ \Theta_p{}^0), \tag{4.2}$$

где $\mathbf{O}_p{}^{0p}$ — вектор (1×3) положения вершины триэдра относительно E_0 в осях системы координат E_p, $\Theta_p{}^0$ — вектор (1×3), определяющий матрицу ориентации ортов триэдра в E_0. Правая часть (4.2) является сложной нелинейной и неоднозначной функцией векторов положения и ориентации РО, однако для ряда распространенных кинематических схем манипуляторов выражения (4.2) известны [14]. В общем случае зависимости (4.2) находятся одним из численных методов решения системы нелинейных уравнений, определяющих прямую кинематическую задачу о положении манипулятора электрода

$$\mathbf{r}_p{}^0=K(\mathbf{q}), \tag{4.3}$$

где $\mathbf{r}_p^{0}=\|\mathbf{O}_p^{0p\mathrm{T}}, \theta_p^{0\mathrm{T}}\|^{\mathrm{T}}$ — вектор (1×6) положения и ориентации триэдра E_p, звездочка означает транспонирование, явный вид функций K просто определяется прямой прогонкой от основания манипулятора к РО.

На основе формул (4.2) рассматривается алгоритм 2 синтеза ПД, в котором отсутствует этап численного интегрирования системы (3.2) или (3.7). Алгоритм 2 совпадает с алгоритмом 1 разд. 3, но на этапе d значения обобщенных переменных в узловых точках определяются по формулам (4.2). Алгоритм 2 предъявляет более слабые требования к гладкости функций (2.1), однако для его реализации необходимы параметрическое представление контура (4.1) и получение сложных аналитических зависимостей (4.2). Первому требованию можно удовлетворить при помощи аппроксимации свариваемых поверхностей набором плоскостей. При этом отслеживаемый контур будет представлять систему отрезков, для каждого из которых известно параметрическое представление радиус-вектора контура от длины дуги $\mathbf{r}_i(s, t)$, где i — номер отрезка.

Отметим, что при аппроксимации контура системой отрезков в точках сопряжения отдельных участков контура необходимо производить сглаживание скачков скорости.

5. Результаты моделирования. Рассмотренные в разд. 3, 4 алгоритмы иллюстрируются задачей отслеживания неподвижного в пространстве контура, образованного пересечением двух цилиндров (рис. 1)

$$f_1=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-R_1^2, \quad f_2=(x-x_2)^2+(z-z_2)^2-R_2^2. \tag{5.1}$$

Для контура (5.1) неизвестно параметрическое представление (4.1) и, следовательно, для синтеза ПД используется алгоритм 1 разд. 3. Вводится в рассмотрение вектор $\mathbf{a}$, ортогональный градиентам $\nabla\mathbf{f}_1$ и $\nabla\mathbf{f}_2$

$$\mathbf{a}=(y_1^c z_2^c, \ -x_1^c z_2^c, \ -y_1^c x_2^c), \tag{5.2}$$

где $\mathbf{r}_i^c=\mathbf{r}-\mathbf{r}_i$ — радиус-векторы точек в системах координат, сдвинутых к центрам цилиндров ($i=1, 2$).

Согласно (2.2), единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$ касательной к контуру равен

$$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|. \tag{5.3}$$

Дифференцированием (5.3) находятся выражения для производных

$$\begin{gathered}\mathbf{r}_s'=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|, \quad \mathbf{r}_{ss}''=\widetilde{\mathbf{a}}_s'-\mathbf{r}_s'(\mathbf{r}_s'\widetilde{\mathbf{a}}_s'), \\ \mathbf{r}_{sss}'''=\widetilde{\mathbf{a}}_{ss}''+\mathbf{r}_s'\,[\widetilde{\mathbf{a}}_s'^2-(\mathbf{r}_s'\widetilde{\mathbf{a}}_{ss}'')]-(\mathbf{r}_s'\widetilde{\mathbf{a}}_s')(\widetilde{\mathbf{a}}_s'+3\mathbf{r}''_{ss}),\end{gathered} \tag{5.4}$$

где знак ~ над производными вектора $\mathbf{a}$ означает деление на $|\mathbf{a}|$.

Отметим, что векторы $\mathbf{r}_s'$, $\mathbf{r}_{ss}''$, $\mathbf{r}_{sss}'''$ (5.4) компланарны и, следовательно, величина кручения контура $T^{-1}=0$ (2.5).

Соотношения (5.4) совместно с (2.3), (2.5) определяют подвижный триэдр, связанный с контуром, и его движение (формулы (2.15), (2.16)).

Предполагается, что электрод перемещается шестизвенным манипулятором $n=(6.4, 4.6, 4.6)$. Из постоянных составляющих векторов (1.1) отличны от нуля линейные смещения O_{13}^0, O_{23}^1, O_{33}^2, O_{43}^3, O_{73}^6, а на местах с номерами n_i расположены обобщенные координаты механизма q_i ($i=\overline{1, 6}$).

Из (1.7) находятся векторы $\mathbf{l}_k^i$ и формируется блочная матрица (6×6)

$$\|\mathbf{l}_6^i\|=\left\|\begin{matrix} A & 0 \\ B & D \end{matrix}\right\|. \tag{5.5}$$

Здесь

$$A=C_6^{4T}\left\|\begin{matrix} O_{33}{}^2\sin q_2+O_{43}{}^3\sin(q_2+q_3) & 0 & 0\\ 0 & -O_{33}{}^2\cos q_3-O_{43}{}^3 & -O_{43}{}^3\\ 0 & O_{33}{}^2\sin q_3 & 0\end{matrix}\right\|;$$

$$B=C_6^{4T}\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 1\\ \sin(q_2+q_3) & 0 & 0\\ \cos(q_2+q_3) & 0 & 0\end{matrix}\right\|,$$

$$D=\left\|\begin{matrix} \sin q_5\sin q_6 & \cos q_6 & 0\\ \sin q_5\cos q_6 & -\sin q_6 & 0\\ \cos q_5 & 0 & 1\end{matrix}\right\|,$$

0 – нулевой блок (3×3), $C_6{}^4=C_3(q_4)C_1(q_5)C_3(q_6)$ – матрица ортов системы координат E_6 в E_4. Структура матрицы (5.5) определяется совмещением точек O_4, O_5, O_6 и упрощает обращение матрицы Г (3.2).

Для вычисления Γ^+ (3.2) используется свойство $(L_k{}^i)^{-1}=L_i{}^k$ матриц преобразования координат скользящего вектора и формула

$$\|\mathbf{l}_6{}^i\|^{-1}=\left\|\begin{matrix} A^{-1} & 0\\ -D^{-1}BA^{-1} & D^{-1}\end{matrix}\right\|. \tag{5.6}$$

Здесь

$$A^{-1}=\left\|\begin{matrix} r_0{}^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & (O_{33}{}^2\sin q_3)^{-1}\\ 0 & -O_{43}^{3-1} & -(O_{33}{}^2\cos q_3+O_{43}{}^3)/(O_{43}{}^3O_{33}{}^2\sin q_3)\end{matrix}\right\|C_6{}^4,$$

$$D^{-1}=-\frac{1}{\sin q_5}\left\|\begin{matrix} -\sin q_6 & \cos q_6 & 0\\ -\sin q_5\cos q_6 & \sin q_5\sin q_6 & 0\\ \sin q_6\cos q_5 & \cos q_5\cos q_6 & -\sin q_5\end{matrix}\right\|,$$

где $r_0=O_{33}{}^2\sin q_2+O_{43}{}^2\sin(q_2+q_3)$ – расстояние от начала звена P_4 до оси O_z.

Следовательно, аналитическое представление для Γ^+ имеет вид

$$\Gamma^+=L_7{}^{pT}L_6{}^{7T}\|\mathbf{l}_6{}^i\|^{-1T}, \tag{5.7}$$

где постоянная матрица $L_7{}^p$ определяется ориентацией РО в триэдре (2.3). Интегрированием (3.2) при известном законе изменения $s(t)$ находится ПД манипулятора, отслеживающее контур (5.1).

Полученные соотношения (5.2)–(5.7) использовались в качестве теста при разработке комплекса прикладных программ синтеза ПД многозвенных манипуляторов. На рис. 3 приведены результаты расчета ПД манипулятора PUMA-560 с линейными размерами звеньев $O_{23}{}^1=0.30$; $O_{31}{}^2=-0.15$; $O_{32}{}^2=0.43$; $O_{42}{}^3=0.43$; $O_{43}{}^3=0.02$. Контур определяется пересечением цилиндра радиуса $R=0.4$ и ортогональной оси цилиндра плоскости, задаваемых точкой на оси цилиндра $\mathbf{r}_c(-0.35;\ 0.6;\ 0.3)$, через которую проходит плоскость, и ортом $\mathbf{e}_r(-0.5;\ \sqrt{3}/2;\ 0)$ оси цилиндра, ортогональному плоскости. Движение РО манипулятора осуществляется из начального положения $\mathbf{p}_0(0;\ 0.8;\ 0.3)$ в конечное $\mathbf{p}_k(-0.69;\ 0.4;\ 0.3)$ по дуге окружности радиуса $R=0{,}4$; РО манипулятора ориентирован перпендикулярно плоскости окружности; движение по дуге состоит из участков разгона, движения с постоянной скоростью $v=1$ м/с и торможения $t_p=t_T=0.1$ с; время движения $T=1.36$ с. Задается число $n_s=8$ узловых точек траектории, которое обеспечивает точность отслеживания контура $|\Delta\mathbf{r}|\leqslant 10^{-4}$. Отметим, что во время движения значение $q_3=\text{const}$, так как расстояние между точками O_1 и O_3 сохраняется постоянным; вблизи положения $q_5\approx 0$, что соответствует плохой обусловленности матрицы L, происходят «быстрые» движения в ориентирующих степенях подвижности.

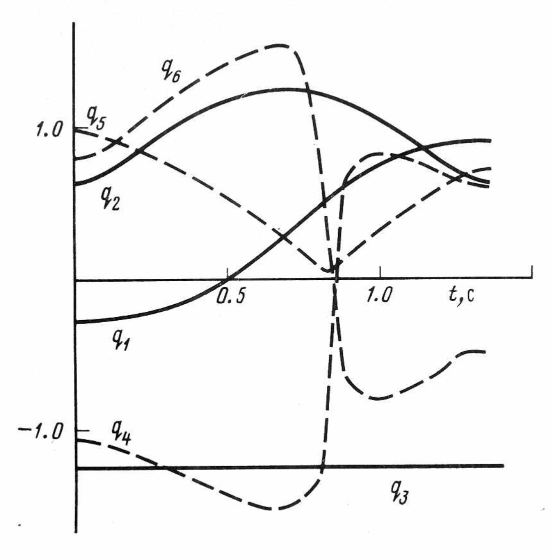


Рис. 3

Заключение. Разработаны алгоритмы синтеза ПД многозвенных манипуляторов, отслеживающих произвольный контур, образованный пересечением подвижных гиперповерхностей в $\mathbf{R}^3$.В основу метода положены решения ОКЗ о скоростях или положении и соотношения, обобщающие формулы Френе — Серре для случая нестационарной параметризации контура. В случае кинематической избыточности механизма синтезируется оптимальное ПД из условия минимума мгновенного значения кинетической энергии.

На основе рассмотренных алгоритмов разработан комплекс программ кинематического анализа и синтеза ПД робототехнического сварочного комплекса, реализующих требуемое совместное движение манипулятора электрода и манипулятора изделия с учетом кинематических и динамических ограничений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Программное обеспечение промышленных роботов/Под ред. А. К. Платонова. М.: Наука, 1986.
2. *Байков В. Д., Вашкевич С. Н.* Решение траекторных задач в микропроцессорных системах ЧПУ/Под ред. В. Б. Смолова. Л.: Машиностроение, 1986.
3. *Клюйко Э. В.* Кинематика манипуляторов, управляемых по траектории движения объекта // Изв. АН СССР. Машиноведение. 1985. № 1.
4. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н., Каплунов А. А.* Некоторые режимы управления промышленными роботами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985. № 6.
5. *Бурков И. В., Заремба А. Т.* Динамика упругого манипулятора с электроприводом // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1.
6. *Коноплев В. А.* Конструирование агрегативных моделей механики носителя системы твердых тел // ПММ. 1989. Т. 52. Вып. 1.
7. *Коноплев В. А.* Агрегативные модели механики систем твердых тел со структурой дерева // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6.
8. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1984. 832 с.
10. *Заремба А. Т.* Уравнения динамики многозвенного манипулятора с голономными связями // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 4.
11. *Виттенбург Й.* Динамика систем твердых тел. М.: Мир, 1980.
12. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983.
13. *Диментберг Ф. М.* Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука, 1982.
14. Динамика управления роботами/Под ред. Е. И. Юревича. М.: Наука, 1984.

Ленинград

Поступила в редакцию
20.I.1989
после доработки
20.IV.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УДК 681.5

А. Б. МАЛЫШЕВ, А. С. ЮЩЕНКО

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ МАНИПУЛЯТОРАМИ

Управление крупными манипуляционными конструкциями требует учета динамики их движения при формировании управляющих алгоритмов. В частности, при решении задачи переноса объекта в заданное положение может быть применена коррекция, основанная на решении обратной задачи динамики. Поскольку управление существенно усложняется, то возникает вопрос об определении условий, при которых целесообразно применять динамическое управление. Предлагается ряд показателей, учитывающих наряду с качественными характеристиками операции и качественные характеристики манипулятора как объекта динамического управления. Сравнительный анализ ряда модификаций типовой манипуляционной конструкции показал эффективность предлагаемого подхода, позволяющего выбрать диапазон изменения характеристик, в котором применение динамического управления является целесообразным.

Введение. Повышение точности и быстродействия манипуляторов требует использования таких способов управления, которые учитывали бы особенности их движения как динамической системы. Это имеет важное значение при разработке крупных манипуляторов, в том числе применяемых для монтажа космических конструкций [1]. Подобные способы управления принято называть динамическими в отличие от способов, основанных на рассмотрении только кинематических соотношений для манипулятора [2]. В [3] был предложен подход, основанный на определении сил и моментов, необходимых для требуемого движения полезной нагрузки, после чего определялось управление манипулятором, реализующее эти силы и моменты. В [4, 5] этот подход применялся для решения терминальных и контурных задач управления манипуляторами.

Переход от кинематических к динамическим способам управления требует использования значительно более производительных ЭВМ в контуре управления. Поэтому необходимо определить условия, при которых целесообразно использовать динамическое управление. Ниже предлагается методика оценки эффективности динамических алгоритмов управления, а также приводятся некоторые качественные результаты проведенных авторами исследований, которые могут быть полезны при разработке широкого класса манипуляционных систем.

1. Коррекционный алгоритм динамического управления. При решении терминальной задачи, цель которой — транспортировка манипулятором полезной нагрузки в заданную область рабочего пространства, авторами был предложен коррекционный алгоритм [5], близкий к алгоритму коррекции движения твердого тела, описанному в [6].

Пусть при $t=t_k$ уже выбран закон движения нагрузки, обеспечивающий решение задачи, например, из условия минимизации времени движения при заданных ограничениях на мгновенную мощность приводов. В этом случае закон изменения сил, приложенных к нагрузке, имеет релейный характер:

$$F_i(t)=F_{ik}\operatorname{sign}(t_{\text{п}k}-t),\qquad i=1,\ 2,\ 3, \tag{1.1}$$

причем значения F_{ik} и моменты переключения $t_{пk}$ могут быть легко найдены. При $t=t_k$ проводится измерение фактического положения нагрузки в рабочем пространстве (в абсолютной системе координат). Если оказалось, что оно отличается от расчетного, то проводится коррекция параметров F_{ik}, $t_{пk}$ таким образом, чтобы промах в расчетный момент встречи $\Delta x_k(T)=x_k(T)-x$ и $\Delta\dot{x}_k(T)=\dot{x}_k(T)$ был равен нулю. В этом случае

$$F_i(t)=(F_{ik}+\beta_{ik})\operatorname{sign}(t_{пk}-t+\gamma_{ik}); \qquad (1.2)$$

параметры β_{ik}, γ_{ik} определяются из системы шести алгебраических уравнений:

$$\Delta x_{jk}(T)=0=\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial x_{jk}(T)}{\partial\beta_i}\beta_{ik}+\frac{\partial x_{jk}(T)}{\partial\gamma_i}\gamma_{ik}\right],$$

$$\Delta\dot{x}_{jk}(T)=0=\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\dot{x}_{jk}(T)}{\partial\beta_j}\beta_{ik}+\frac{\partial\dot{x}_{jk}(T)}{\partial\gamma_i}\gamma_{ik}\right]. \qquad (1.3)$$

$$j=1,\ 2,\ 3.$$

Производные, входящие в правую часть (1.3), могут быть аппроксимированы соответствующими разностями, для чего необходимо найти $x_k(T,\ \beta_k,\ 0)$, $x_k(T,\ 0,\ \gamma_k)$ и т. д. путем интегрирования уравнений движения полезной нагрузки с начальными условиями, определенными при $t=t_k$. Процесс коррекции аналогичен при всех k, для которых $t_k<t_{пk}$. При $t_k>t_{пk}$ коррекцию можно проводить только по параметрам β, т. е. только по одному из условий (1.3), вычисляя погрешность выполнения другого. Если эта погрешность становится выше допустимой, целесообразно перейти к линейному закону управления

$$F_i(t)=k_1(x_i^*-x_i(t))-k_2\dot{x}_i(t). \qquad (1.4)$$

Определив закон изменения сил $F(t)$, сформируем вектор движущих моментов (сил) в степенях подвижности манипулятора по формуле

$$\mu=\mu_0+\mu_k, \qquad (1.5)$$

где $\mu_0=J^{\mathrm{T}}(q)F(t)$ — управляющие моменты, $J(q)$ — якобиева матрица для заданной кинематической схемы манипулятора, q — его обобщенные координаты, μ_k — корректирующие моменты, определяемые из условия компенсации моментов, обусловленных движением звеньев манипулятора; они определяются из уравнений кинетостатики [2] и имеют следующий вид:

$$\mu_k=\alpha(\tilde{A}(q^*)\ddot{q}^*+\tilde{C}(q^*,\ \dot{q}^*)). \qquad (1.6)$$

Здесь символом * обозначены функции, соответствующие опорному движению, а матрицы $\tilde{A}$, $\tilde{C}$ характеризуют движение манипулятора без нагрузки. Параметр $\alpha\in[0,\ 1]$ выбирается с учетом заданных ограничений на суммарную мгновенную мощность приводов манипулятора:

$$|\dot{q}^{\mathrm{T}}\mu|\leqslant P, \qquad t\in[t_u,\ T]. \qquad (1.7)$$

2. Анализ эффективности динамической коррекции. Введем численные показатели, характеризующие особенности динамики манипуляционного механизма и качество выполнения заданной операции.

Показатели качества определяются типом операции. Так, качество выполнения терминальной манипуляционной операции определяется отклонениями в момент окончания операции по положению и по скорости

$$\varepsilon_x(T)=\|x(T)-x^*(T)\|, \qquad \varepsilon_v(T)=\|\dot{x}(T)\|. \qquad (2.1)$$

Введем также относительное отклонение времени выполнения операции T от расчетного $T_р$, которое определяется для опорного движения

$$\varepsilon_T = (T - T_р)/T_р \cdot 100\,\%. \qquad (2.2)$$

Одним из основных динамических показателей манипулятора служит отношение массы звеньев манипулятора к массе полезной нагрузки:

$$\delta_m = \sum_{i=1}^{N} m_i/m_н \cdot 100\,\%. \qquad (2.3)$$

Одна из целей динамической коррекции заключается в уменьшении степени взаимовлияния каналов управления, которую можно определить показателем $S = \max_i S_i$:

$$S_i = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{T} \left| \sum_{j=1}^{N} (a_{ij}\ddot{q}_j + b_{ij}(\dot{q})\dot{q}_j) \right| dt \Big/ \int_{t_0}^{T} |a_{ii}\ddot{q}_i|\, dt, \qquad (2.4)$$

где a_{ij}, b_{ij} — элементы матриц A, B, входящих в уравнения динамики манипулятора [2]

$$A(q)\ddot{q} = B(q, \dot{q})\dot{q} + \mu. \qquad (2.5)$$

Поскольку по заданным q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$ из последнего уравнения можно рассчитать μ, то нетрудно вычислить мгновенную мощность

$$P_i = \mu_i \dot{q}_i, \qquad (2.6)$$

а также величины

$$P_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} P_i, \quad P_m = \max_{i,t} |P_i(t)| \qquad (2.7)$$

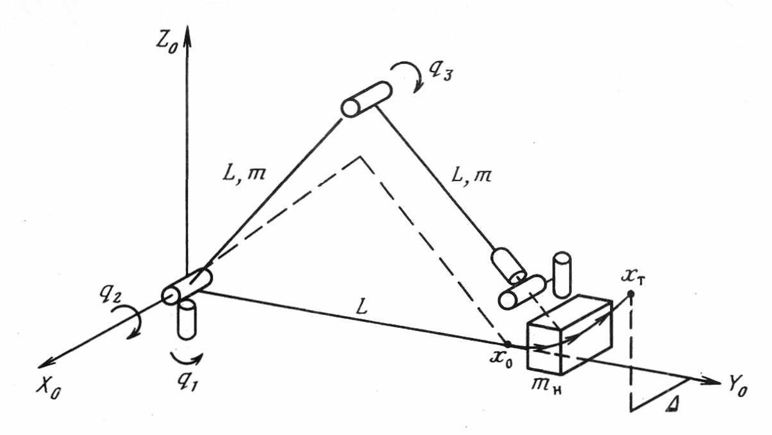
и затрачиваемую работу

$$A = \int_{t_0}^{T} P_\Sigma(t)\, dt. \qquad (2.8)$$

Затраты на динамическую коррекцию по сравнению с затратами на движение по расчетной траектории можно оценить с помощью показателя

$$\Omega = \max_i \int_{t_0}^{T} |\mu_{ik}(t)| / |\mu_{i0}(t)|\, dt \cdot 100\,\%. \qquad (2.9)$$

Для иллюстрации использования приведенных выше показателей рассмотрим сравнительный анализ движения манипуляционного механизма, изображенного на рисунке, при кинематическом управлении по закону (1.4) и при динамическом управлении, описанном в разд. 2. Результаты приводятся для пяти модификаций механизма, отличающихся линейными размерами и инерционными характеристиками, приведенными в табл. 1. Обозначено L — длина второго и третьего звеньев, которые представляют собой цилиндрические трубы с внутренним радиусом сечения r и наружным радиусом R; J_c — момент инерции осевого сечения, m — масса звена, J_x^c, J_y^c, J_z^c — его главные центральные моменты инерции. Плотность материала $\rho = 10^3$ кг/м^3 (углепластик). Масса нагрузки $m_н = 6 \cdot 10^3$ кг. Задача состояла в переносе (в пространстве с нулевой силой тяжести) полезной нагрузки из начального положения $x_0 = [0, L, 0]$ (рис. 1) в точку $x_T = [\Delta, L+\Delta, \Delta]$, где величина Δ выбиралась от 10 до 20% длины манипулятора $2L$; конкретно для рассмотренных вариантов $\Delta = 1.2$; 1.2; 1.7; 2.3; 4 м. В выбранном диапазоне параметры k_1 и k_2 определялись из компро-



мисса между требованиями апериодичности переходного процесса и его минимального времени.

Сравнительный анализ проводился методом математического моделирования с использованием пакета прикладных программ, составленных для ЕС ЭВМ на языке ПЛ-1 [7]. В табл. 2 приведены характеристики, соответствующие кинематическому управлению, а в табл. 3 — динамическому управлению манипулятором.

В табл. 2 $\ddot{q}_m = \max_i |q_i|$, показатель $\varepsilon_т$ определяет увеличение времени процесса по сравнению с движением нагрузки.

Отметим, что во всех случаях время процесса T оказывается при динамическом управлении существенно меньшим. Относительное уменьшение его $\varepsilon_т$ в табл. 3 вычислено в предположении, что в (9) $T_р$ — время из табл. 2.

Другой эффект динамического управления, который следует из сопоставления табл. 2 и 3,— существенное сокращение взаимовлияния кана-

Таблица 1

L, м	R, м	r, м	J_c, м⁴	m, кг	J_x^c, кгм²	J_y^c, кгм²	J_z^c, кгм²	δ_m, %
5	0.13	0.1	$91 \cdot 10^{-7}$	108.3	1.46	225.46	225.46	3.6
7; 5	0.15	0.12	$146 \cdot 10^{-7}$	178	3.29	7.29	727	5.9
10	0.18	0.15	$226 \cdot 10^{-7}$	310	8.53	2590	2590	10
20	0.25	0.22	$767 \cdot 10^{-7}$	885	49	29516	29516	29.5
35	0.3	0.27	$1366 \cdot 10^{-7}$	1879	153	191844	191844	62.6

Таблица 2

T, с	εT, %	$\varepsilon_x(T)$, м	$\varepsilon_v(T)$, м/с	S, отн. ед.	$\ddot{q}_m$, град/с²	P_m, Вт
41	2.5	0.038	0.0016	0.9	0.8	12.6
42	5	0.059	0.0017	1.5	0.63	15.25
67	11	0.08	0.0031	2.8	0.36	12.10
94	15	0.141	0.004	6.1	0.11	15.3
166	18	0.18	0.0005	9.8	0.034	16.25

Таблица 3

T, с	$\varepsilon_т$, %	$\varepsilon_x(T)$, м	S, отн. ед.	q_m, град/с²	P_m, Вт	Ω, %
20.5	30	0.03	0.48	1.02	19.1	3.5
19.06	32	0.05	0.61	0.645	24.9	4
23.8	50	0.05	0.7	0.424	25.1	5.2
28.9	57	0.05	0.82	0.134	35.2	15
57.4	60	0.07	1.0	0.036	46.1	90

лов управления (показатель S). Непосредственным следствием этого является повышение точности манипулирования, т. е. снижение ошибки $\varepsilon_x(T)$.

Преимущества динамического управления достигаются за счет увеличения потребляемой мощности. Однако благодаря введенным ограничениям (1.7) значения суммарной мгновенной мощности не превосходят заранее заданного значения (в рассматриваемом примере $P=300$ Вт).

Показатель Ω, вычисленный только при динамическом управлении, резко возрастает при значениях $\delta_m>10\%$. При $\Omega>50\%$ предлагаемый способ, по-видимому, нецелесообразен, т. к. движущие моменты определяются в значительной мере необходимостью коррекции, а не законом управления. Таким образом, в рассматриваемом примере динамическое управление целесообразно использовать в диапазоне изменения параметров $\delta_m\in[4, 30]$, $\Omega\in[4, 15]$, т. е. для 2, 3 и 4 модификаций.

Принимая во внимание сложность вычислений, необходимо также проанализировать влияние запаздывания Δt, вносимого ЭВМ, на качество процессов. В рассматриваемом случае, начиная с $\Delta t=3$ с, происходит заметное увеличение ошибок и при дальнейшем возрастании наступает потеря устойчивости. Следует иметь в виду, что эти оценки соответствуют скоростям перемещения полезной нагрузки порядка 0.05—0.15 м/с.

Заключение. Проведенные исследования с очевидностью показали необходимость перехода от кинематических к динамическим алгоритмам управления при разработке крупных манипуляционных конструкций. Использованная методика исследований позволяет определить границы эффективного применения предложенного подхода к формированию управления. Учитывая, что выше рассмотрены модификации наиболее распространенной схемы манипулятора, полученные рекомендации могут быть непосредственно использованы при разработке широкого класса манипуляционных роботов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гвамичава А. С., Кошелев В. А.* Строительство в космосе. М.: Знание, 1984.
2. *Медведев В. Г., Лесков А. Г., Ющенко А. С.* Системы управления манипуляционных роботов. М.: Наука, 1978.
3. *Ющенко А. С.* Задача динамического управления манипуляторами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1985 № 3.
4. *Малышев А. Б., Ющенко А. С.* Алгоритм управления движением манипулятора вдоль заданной траектории с учетом динамики звеньев // Изв. вузов. Машиностроение. 1984. № 5.
5. *Малышев А. Б., Ющенко А. С.* Алгоритм терминального динамического управления манипуляционным роботом // Изв. вузов. Машиностроение. 1984. № 9.
6. *Охоцимский Д. Е., Голубев Ю. Ф., Сихарулидзе Ю. Г.* Алгоритмы управления космическими аппаратами при входе в атмосферу. М.: Наука, 1975.
7. *Малышев А. Б., Чуменко В. Н.* Универсальная программа моделирования динамики манипуляционного робота // Роботы и робототехнические системы. Иркутск: ИПИ, 1983.

Москва

Поступила в редакцию
27.VI.1989

после доработки
29.III.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

УДК 681.325

В. В. ЧЕКУШКИН

ТАБЛИЧНО-АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Приведена оригинальная структура таблично-алгоритмического преобразователя, предназначенная для широкого класса объектов со специализированными вычислителями, обеспечивающих переработку информации в реальном масштабе времени. Преобразователь при высоком быстродействии обеспечивает значение ошибки вычисления элементарной функции примерно равное половине единицы младшего разряда цифрового кода.

Введение. В быстродействующих специализированных вычислителях возникает необходимость обеспечить точность формирования тригонометрических функций с погрешностью порядка $10^{-6}\div10^{-7}$, что соответствует $20\div30$ двоичным разрядам. Такая задача может быть, например, поставлена в робототехнической системе, когда необходимо для обработки рабочим органом робота траектории в виде окружности аппаратно осуществлять вычисление функции $\sin\beta$ и $\cos\beta$ [1]. При этом необходимо стремиться как к сохранению аппаратных затрат при заданном быстродействии, так и (особенно) к снижению ошибки формирования элементарной функции.

Табличный метод вычисления элементарных функций обеспечивает высокое быстродействие и дает минимальную ошибку вычисления функции, не превышающую при симметричном округлении половины единицы младшего разряда цифрового кода.

В то же время объем памяти ПЗУ в битах для данного метода

$$A=n\cdot2^n, \tag{0.1}$$

где n — число двоичных разрядов, например, для реализации таблицы функции $\sin\beta$.

Для таблично-алгоритмического метода характерно значительное снижение аппаратурных затрат при небольшом снижении быстродействия. В то же время для данного метода характерно и большее значение ошибки вычисления функции по сравнению с табличным методом.

1. Постановка задачи. Произведем оценку составляющих ошибок для метода кусочно-линейной интерполяции непосредственно в единицах младшего разряда цифрового кода, а также способов уменьшения результирующей ошибки вычисления функции, фактически обеспечивающих точность формирования, равную половине единицы младшего разряда выходного кода, и приведем структуру устройства, реализующую указанный метод вычислений.

2. Анализ ошибок. Реализация структуры устройства. Если входной параллельный код угла β аргумента, например функции $\sin\beta$, задан в виде выражения $\beta=\sum_{m=1}^{n}\beta_m2^{-m}$ и проведено разделение старших и младших разрядов на группы

$$\beta_{\text{ст}}=\sum_{m=1}^{g}\beta_m2^{-m}\quad\text{и}\quad\beta_{\text{мл}}=\sum_{m=g+1}^{n}\beta_m2^{-m},$$

то формулу для аппроксимации функции $\sin\beta$ между двумя соседними узлами аппроксимации j можно записать в виде

$$\sin(\beta_{ст}+\beta_{мл})=\sin\beta_{ст}+K_j\beta_{мл} \qquad (2.1)$$

где K_j — скорость нарастания функции между соответствующими узлами аппроксимации, определяемая разрядами аргумента $\beta_{ст}$ [1].

Для упрощения структуры преобразователя во всем диапазоне L задания функции будем брать равные, кратные степени числа 2 интервалы между узлами (точками) аппроксимации j. Длина интервала интерполяции l в этом случае будет равна

$$l=\frac{L}{2^g},$$

где 2^g — число интервалов интерполяции.

Максимальная погрешность вычисления функции $\sin\beta$ в соответствии с (2.1)

$$\Delta\sin\beta=\Delta\sin\beta_{СТ}+\Delta K_j\beta_{МЛ}+\Delta_{УМН}+\delta+\Delta_{ОКР}. \qquad (2.2)$$

Здесь $\Delta\sin\beta_{СТ}$ и ΔK_j — ошибки задания (оцифровки) констант в ПЗУ для узлов аппроксимации j, а именно функции $\sin\beta$ и коэффициента K_j, так как число разрядов представления функции конечно.

Если задать код функции $\sin\beta_{ст}$ в узлах аппроксимации с η дополнительными разрядами и осуществить симметричное округление, то ошибка вычисления будет равна

$$\Delta\sin\beta_{СТ}={}^1/_2\cdot 2^{-(n+r)}. \qquad (2.3)$$

Таблицу значений коэффициента K_j для узлов аппроксимации следует строить с учетом полученных значений погрешностей $\sin\beta_{СТ}$. Таким образом, эти погрешности, имея разный знак, будут в соответствии с (2.2) в значительной степени компенсировать друг друга. В дальнейшем будем считать, что $\Delta K_j=0$.

Рассмотрим возможность уменьшения и других составляющих ошибок на примере конкретной структуры (рисунок), где в соответствии с (2.1) вычисление функции $\sin\beta$ осуществляется путем задания таблиц опорных значений функции и скорости ее изменения по значениям старших разрядов аргумента в ПЗУ, интерполяции значения приращения функции, определяемого скоростью ее изменения и младшими разрядами аргумента между опорными точками на выходе умножителя [2].

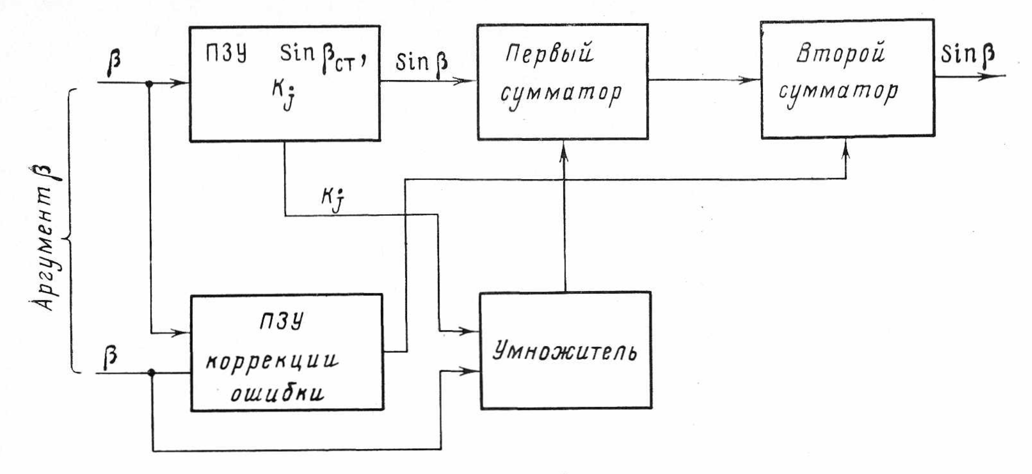
Второй сумматор осуществляет сложение суммарного кода текущей погрешности аппроксимации функции между опорными табличными значениями полиномом первого порядка и кодов усечения разрядных сеток операндов, одновременно формируемых в ПЗУ коррекции ошибок со значением функции $\sin\beta$, которое снимается с выхода умножителя.

Считаем, что умножитель осуществляет вычисление произведения $K_j\beta_{МЛ}$ с учетом всех значащих цифр. Таким образом, при симметричном округлении при отбрасывании разрядов, вес которых меньше веса разряда $2^{-(n+r)}$, ошибка умножения не будет превышать значения

$$\Delta_{УМН}\leqslant{}^1/_2\cdot 2^{-(n+r)}. \qquad (2.4)$$

При отбрасывании r дополнительных разрядов и симметричном округлении значения функции во втором сумматоре

$$\Delta_{ОКР}={}^1/_2\sum_{i=n+1}^{n+r}2^{-l}=\frac{2^{-n}-2^{-(n+r)}}{2}. \qquad (2.5)$$



Структура преобразователя

Значение погрешности аппроксимации функции полиномом первого порядка определяется выражением [3]

$$\delta = {}^1/_2(\beta-\beta_j)(\beta-\beta_{j+1})\frac{d^2\sin\beta}{d\beta^2} = {}^1/_2(\beta-\beta_j)(\beta-\beta_{j+1})\sin\beta. \qquad (2.6)$$

Поскольку $\beta_{j+1}-\beta_j=2^{-g}$, с учетом пересчета в радианную меру угла максимальное значение ошибки аппроксимации [4]

$$\delta_{\max} = \frac{\pi^2(2^{-g})^2}{32}. \qquad (2.7)$$

Алгоритм формирования значения кода коррекции ошибки аппроксимации строится в соответствии с (2.6), где текущее значение ошибки аппроксимации δ является функцией как старших, так и младших разрядов кода угла β. С этой целью в соответствии с предварительно определенным числом дополнительных разрядов r и максимальным значением ошибки $\delta_{\max}$, вычисленным в соответствии с (2.7), определяют число разрядов представления кода ошибки аппроксимации. По заданному числу выходных разрядов ПЗУ коррекции ошибки задается число первых разрядов из группы $\beta_{ст}$, определяющих код функции $\sin\beta$ в (2.6), и число первых разрядов из группы $\beta_{мл}$, определяющих приращение аргумента внутри узла аппроксимации в (2.6). Указанные разряды являются входными для ПЗУ коррекции ошибки.

Таким образом, максимальное значение ошибки аппроксимации можно уменьшить до значения

$$\delta_{\max} \leqslant {}^1/_2\cdot 2^{-(n+r)}. \qquad (2.8)$$

Естественно, что при этом в ПЗУ одновременно следует хранить и значение кода, обеспечивающее симметричное округление кода функции $\sin\beta$ при окончательном отбрасывании дополнительных разрядов r во втором сумматоре, т. е. в таблицу кода коррекции в соответствии с (2.6) следует добавить значения $\frac{2-n}{2}$.

В соответствии с (2.2)–(2.8) получим

$$\Delta\sin\beta = 2^{-n}(2^{-r}+{}^1/_2). \qquad (2.9)$$

Проведем оценку аппаратурных затрат. Емкость ПЗУ в битах по выходам разрядов $\sin\beta_{ст}$ и K_j будет соответственно равна

$$A_1=(n+r)2^g,$$
$$A_2=(n-g+r+1)2^g. \qquad (2.10)$$

Число разрядов по входам умножителя со стороны множимого и множителя определяется следующим образом:

$$K=(n-g+r+1),$$
$$c=n-g. \qquad (2.11)$$

Более детальная оценка аппаратурных затрат при реализации структуры устройства в определенной степени носит условный характер, поскольку она определяется используемой элементной базой. Тем не менее можно с достаточно высокой степенью достоверности оценить аппаратурные затраты в части использования в структуре устройства других микросхем в некотором их интегральном эквиваленте по числу выводов, потребляемой мощности, стоимости по отношению к применяемым микросхемам ПЗУ. Можно, например, оценить аппаратурные затраты на умножитель в числе корпусов ПЗУ. Таким образом, суммарные аппаратурные затраты будут оцениваться в числе корпусов микросхем ПЗУ.

Алгоритм разбиения входного параллельного кода угла аргумента β на две составляющие должен обеспечивать задачу оптимизации структуры устройства по точностным характеристикам, аппаратурным затратам и быстродействию. Несмотря на то что эта задача неоднозначная и определяется организацией БИС ПЗУ, умножителей, многовходовых сумматоров, тем не менее можно задать ряд условий для выбора числа разрядов в группах $\beta_{\text{ст}}$ и $\beta_{\text{мл}}$.

Без наличия ПЗУ коррекции ошибки в соответствии с (2.7) число разрядов g в группе $\beta_{\text{ст}}$ должно быть больше или равно числу разрядов в группе $\beta_{\text{мл}}$. В противном случае максимальное значение только составляющей ошибки аппроксимации будет равно нескольким единицам младшего разряда выходного кода функции $\sin\beta$. Для структуры (рисунок) имеется возможность задавать значение g и меньше чем значение $^n/_2$. В этом случае в соответствии с (2.10) можно обеспечить сокращение аппаратурных затрат при $n=20\div30$ за счет значительного уменьшения объема памяти ПЗУ $\sin\beta_j$, K_j, даже если его реализовать с применением БИС ПЗУ 556 РТ5, 556 РТ7. В то же время в соответствии с (2.11) аппаратурные затраты на умножитель будут не очень большими, поскольку в настоящее время серийно выпускаются быстродействующие умножители 8×8, $12\times\times12$ и 16×16 разрядов.

Приведем полный алгоритм работы преобразователя для значения угла $\beta=29°,004$. Для большей наглядности реализуем структуру устройства при числе разрядов $n=11$ и диапазоне изменения функции от 0° до 90°. В этом случае для оценки точностных характеристик при вычислении значения функции используем общедоступные шестизначные математические таблицы Чемберса, поскольку с помощью этих таблиц можно составить контрольные значения функции $\sin\beta$ в двоичной системе счисления для числа разрядов $n=19$. Для сравнительной оценки аппаратурных затрат и быстродействия реализуем ПЗУ $\sin\beta_{\text{ст}}$, K_j на микросхемах ПЗУ 155РЕЗ с организацией памяти (32×8) бит и временем выборки 0,07 мксек. Если задать $g=5$, $r=2$, то для реализации ПЗУ $\sin\beta_{\text{ст}}$, K_j потребуются в соответствии с (2.10) четыре корпуса микросхем 155РЕЗ. Еще одна микросхема необходима для реализации ПЗУ коррекции ошибки аппроксимации. В соответствии с (2.7) максимальное значение ошибки аппроксимации равно 0.68 единицы младшего разряда, таким образом, с учетом (2.8) достаточно трехразрядного кода коррекции ошибки. Для обращения к ПЗУ коррекции ошибки аппроксимации используем два первых разряда из группы $\beta_{\text{ст}}$ и три первых разряда из группы $\beta_{\text{мл}}$. В соответствии с (2.11) умножитель должен имет девять входов со стороны входа множителя. Для большей наглядности при сравнении структур преобразователей дадим приближенную оценку аппаратурных затрат в корпусах микросхем 155РЕЗ.

Так, например, умножитель 9×6 разрядов можно реализовать с помощью шести умножителей 3×3 разрядов. В свою очередь умножитель 3×3 разрядов можно реализовать на двух микросхемах ПЗУ 155РЕЗ, в которые записывается таблица произведения двух трехразрядных сомножителей. Полное произведение получается путем суммирования частичных произведений с умножителей 3×3 разрядов с помощью микросхем быстродействующих сумматоров, например 155ИПЗ с временем сложения чисел в каждой из ступеней суммирования 0.04 мксек.

Таким образом, при времени вычисления функции 0.32 мксек суммарные аппаратурные затраты составят примерно 30 микросхем 155РЕЗ.

Для реализации же структуры устройства табличным методом в соответствии с (0.1) необходимо 128 микросхем 155РЕЗ.

Еще одна микросхема 155РЕЗ и одна микросхема типа 155ЛА1 нужны для организации дешифратора. Таким образом, для табличного метода аппаратурные затраты составят 129 микросхем 155РЕЗ, а время вычислений будет равно 0.16 мксек.

Для значения $n=11$ цена деления младшего разряда кода угла β составляет $\frac{90^\circ}{2''}=0^\circ,04394531$, а интервал между точками аппроксимации равен $\frac{90^\circ}{32}=2^\circ,8125$. Например, для 10-го узла аппроксимации имеем значение функции $\sin 28^\circ,125=0.471397$. Этому значению соответствует двоичный код 0111100010110. Для следующего узла интерполяции имеем $\sin 30^\circ,93375=0.514027$. Разность значений функций в 11-м и 10-м узлах интерполяции пропорциональна коэффициенту K_{10} и соответствует двоичному коду 0000101011110. Значение кодов $\sin\beta_{10}$ и K_{10} хранятся в ПЗУ $\sin\beta_j$, K_j. Приращение значения функции на выходе умножителя по приращению значения аргумента, равному $0^\circ,878901$ определяется в двоичном коде следующим образом;

$$101011110\times10100=1101100011000.$$

С учетом сдвига на шесть разрядов вправо и отбрасыванием при симметричном округлении всех значащих разрядов, следующих за 13-м, получим приращение функции 0000001101100. Таким образом, на выходе первого сумматора будем иметь значение функции 0111110000010.

В соответствии с (7) и с учетом добавления в код коррекции ошибки значения $^1/_2\cdot2^{-11}$ получим полный код коррекции ошибки 00000000001. Итак, значению функции на выходе второго сумматора 01111100001 будет соответствовать значение функции в десятичной системе счисления 0.48486328. Из таблиц Чемберса имеем $\sin 29^\circ,004=0.484912$. Итак, полное значение ошибки $\Delta\sin\beta=0.0000487$ в 10 раз меньше цены деления младшего 11-го разряда.

Для табличного метода получим двоичный код функции для $\sin 29^\circ,004$ равным 011111000010001100. т. е. также получим значение ошибки в 10 раз меньше цены деления младшего 11-го разряда. Результаты оценки ошибок вычисления, аппаратурных затрат и быстродействия сведем в таблицу.

В данном случае аппаратурные затраты приведены в числе корпусов микросхем 155РЕЗ. Но необходимо отметить, что при числе разрядов $n=20$, и более дополнительный анализ показал, что при применении в структуре (рисунок) БИС ПЗУ 556РТ5, 556РТ7 умножителей типа КР1802ВР2... разница в аппаратурных затратах для табличного и таблично-алгоритмического метода достигает нескольких порядков. В то же время ошибки вычислений и быстродействие примерно соответствуют таблице.

Таблица

Способ вычисления	Ошибка вычисления		Аппаратурные затраты	Быстродействие, мксек
	теоретическая	фактическая		
Табличный	<0.5	0.1	129	0.16
Таблично-алгоритмический	<0.75	0.1	30	0.32

Заключение. Предложенная структура устройства обеспечивает значение ошибки вычисления функции, практически соответствующее табличному методу. Это особенно важно при реализации системы управления робота, когда цифровые структуры должны вносить минимальное значение в результирующую ошибку формирования траектории движения рабочего органа робота.

При этом время вычисления увеличивается незначительно, а аппаратурные затраты намного меньше, чем при использовании табличного метода вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Байков В. Д., Вашкевич С. Н.* Решение траекторных задач в микропроцессорных системах. Л.: Машиностроение, 1986.
2. *Чекушкин В. В.* Устройство для вычисления элементарных функций табличным методом: А. с. 1442984 (СССР). // Б. И. 1988. № 45.
3. *Хлистунов В. Н.* О погрешности аппроксимации дискретных методов измерения // Приборостроение. 1960. № 5.
4. *Шилин Н. Ф.* Некоторые аппаратные способы вычисления тригонометрических функций $\sin X$, $\cos X$ в цифровых вычислительных машинах // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ОТ. 1969. Вып. 14.

Муром

Поступила в редакцию 11.VIII.1989

после доработки 2.I.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 • 1991

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

УДК 681.3:681.5:621.3

В. В. МИКИШЕВ, В. Б. ТАРАСОВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В САПР. АНАЛИЗ ОТЕЧЕСТВЕННОГО И ЗАРУБЕЖНОГО ОПЫТА

Работа посвящена перспективам развития САПР, которые в настоящее время связываются главным образом с использованием методов искусственного интеллекта и экспертных систем. Рассмотрение в основном ограничено рамками САПР в машиностроении.

Обосновывается необходимость использования методов искусственного интеллекта и экспертных систем при разработке САПР, даются оценки эффективности интеллектуальных САПР, анализируется целесообразность применения указанных методов в решении конкретных задач автоматизации проектирования. На основе анализа публикаций и собственного опыта разработки САПР дается перечень таких задач.

Рассмотрение ведется на концептуальном уровне, с акцентом на вопросы применения и эффективности, без детализации существующих методов, программного инструментария и систем.

Основная цель работы – привлечь внимание руководителей и специалистов в области автоматизации проектирования к достижениям в области построения интеллектуальных систем, указать на существование проблем, которые могут быть эффективно решены только с использованием методов искусственного интеллекта и экспертных систем.

Работа носит обзорный характер.

В настоящее время перспектива развития САПР связывается с методами искусственного интеллекта [1–9], [12–19], [22–32], [35–40], [42–45], [53, 54].

Традиционной технологией решения задач на ЭВМ является обработка данных, реализуемая с помощью процедурно-ориентированных методов программирования. Суть этой технологии сводится к тому, что в ней ведущую роль играет процедурная компонента (программы обработки). Декларативная же компонента, т. е. данные, остается пассивной.

Интенсивные исследования в области искусственного интеллекта (ИИ) позволили сформировать новую технологию решения задач [36], реализуемую с помощью объектно-ориентированных методов программирования. В этой технологии активную роль играют уже данные, а точнее знания предметной области задачи или класса задач. Принципиальное отличие новой технологии от традиционной состоит в том, что ход решения задачи и результаты определяются текущим состоянием базы знаний, а не «зашиты» жестко в алгоритмы программ.

Первым практическим выходом исследований в области ИИ явились экспертные системы (ЭС) [35–39], [50, 54]. ЭС может рассматриваться как действующая модель эксперта (или коллектива экспертов), обладающая знаниями эксперта и способная воспроизводить ход его рассуждений. Наиболее удачные реализации ЭС (например, MYCIN) способны решать задачи почти с тем же успехом, что и сами эксперты. Это обусловило широкое применение этих систем в нетрадиционных для использования ЭВМ

областях, где знания трудно формализовать в виде детерминированных математических моделей. Наибольшее распространение ЭС получили в проектировании заказных интегральных схем (например, система DESIGN ADVISOR29), в поиске неисправностей [35], автоматизации программирования и военных приложениях [50, 86]. Применение (С позволяет, например, при проектировании интегральных схем повысить (по данным фирмы NEC) производительность труда в 3–6 раз, а при программировании (по данным фирмы TOSHIBA) – в 5 раз. Ведущие западные фирмы широко используют ЭС в своей деятельности. Так, например, в 1987 г. IBM использовала 70 ЭС. По мнению конструктора IBM Шорра, в ближайшее время число ЭС, используемых IBM, будет ежегодно удваиваться (см. [35]). Еще большее число ЭС используется фирмой Дюпон. Руководитель работ по ИИ этой фирмы Эд Малер заявил, что в 1987 г. фирма использует 200 ЭС и планирует в 1990 г. иметь 2000 ЭС (см. [35]).

В настоящее время ведутся разработки ЭС для многих приложений. Это – образование, медицина, законодательство, организационное управление, техническая диагностика и т. д. В том числе, последние 5–7 лет стали появляться сообщения о применении ЭС при автоматизации проектных работ [3, 31, 40, 43, 67, 78].

Анализ существующих САПР показывает, что, как правило, такие системы состоят из набора детерминированных процедур, связанных друг с другом через человека; который принимает решения о порядке выполнения процедур, достоверности и качестве результатов и т. д. Разработчики САПР сталкиваются с объективными трудностями, обусловленными наличием большого количества трудноформализуемых задач, относящихся к процессам принятия и оценки проектных решений. И здесь методы извлечения знаний из эксперта (опытного проектировщика), их формализация в базах знаний ЭС и последующее включение этих систем в верхние этажи архитектуры САПР должны существенно повысить эффективность и уровень автоматизации проектирования. Более того, в [24] обосновывается положение, согласно которому обеспечение гарантии качества объекта и процесса проектирования возможно лишь при использовании в рамках САПР методов и средств, традиционно относящихся к ИИ.

Коль скоро решение проектных задач основано на применении предыдущего опыта, а этот опыт заключен главным образом в знаниях лучших проектировщиков, возникает проблема моделирования рассуждений проектировщиков (см. [38]), а вместе с тем и самого процесса решения проектных задач в рамках ЭС. ЭС способна заменить проектировщиков (экспертов) при решении сложных задач. Она вместо жесткой математической (детерминированной модели объекта или процесса использует формализованную систему инженерных знаний, построенную и отлаженную при участии проектировщиков, пригодную для широкого тиражирования и массового использования. Решается задача использования САПР для проектирования не одного, а целого класса изделий (устраняются такие недостатки, как узкая направленность и низкая гибкость), поскольку одна и та же система формализованных знаний обеспечивает решение не одной, а целого ряда задач из области применения ЭС.

1. Концепция экспертной системы проектирования. В настоящее время существует большое разнообразие типов САПР, отличающихся видом проектируемых объектов, классами решаемых задач, ориентацией на разные стадии проектирования, степенью интеграции и т. д. Выработка общей стратегии использования методов ИИ, построение общей концепции интеллектуальной САПР (ИСАПР), ее архитектуры в таких условиях – задача архисложная. По нашему мнению, такая ИСАПР может иметь общую базу знаний с моделями процесса проектирования, а также ряд ЭС, подключаемых на стыках между детерминированными проектными процедурами. Наиболее полно методологические и теоретические вопросы построения ИСАПР отражены в [81, 82, 84, 85]. Отечественных

публикаций на эту тему немного и они, как правило, ограничиваются рассмотрением частных аспектов общей концепции ИСАПР (см., например, [24, 27, 32]). Поэтому в настоящем разделе мы ограничимся рассмотрением ИСАПР как просто ЕС, предназначенной для решения какой-либо задачи (или класса задач) из области проектирования. В следующем же разделе дадим перечень классов задач проектирования, для автоматизации решения которых целесообразно применение технологии ЭС.

В разработке любой ЭС можно выделить два подхода. Первый состоит в создании ЭС для конкретного приложения, а второй — в разработке инструментальных средств (ИС), на основе которых создаются прикладные ЭС.

В первом случае используются универсальные процедурно-ориентированные языки программирования (чаще всего язык Си) или языки ИИ Лисп, Пролог. Создание ЭС достаточно трудоемко, но есть возможность добиваться высокой эффективности работы ЭС на стадии ее программной реализации. Специфика предметной области проектирования проявляется в конкретных методах построения ЭС.

Во втором случае используются языки представления знаний конкретных инструментальных систем. Создаваемые с использованием инструментальных средств (оболочек) прикладные ЭС, как правило, менее эффективны. В настоящее время и в нашей стране и особенно за рубежом имеется большое число различных инструментальных систем и оболочек для разработки ЭС. По нашему мнению, многие из них с успехом могут быть использованы для построения ЭС-проектирования. Тем не менее вопросы об эффективности их использования в ИСАПР, а также целесообразности разработки специализированных инструментальных средств для создания ЭС-проектирования остаются открытыми. Есть отечественные примеры построения ЭС-проектирования с использованием как первого [48, 53], так и второго [1, 2, 40] подходов. Среди зарубежных оболочек для ИСАПР можно выделить [64]. Ниже кратко остановимся на концепции ИС-проектирования, описанной в [40]. Здесь для представления знаний выбрана логика предикатов. Авторы концепции считают, что задачи проектирования, требования к проектируемому объекту, условия его использования, закономерности нахождения проектных решений можно выразить на основе логики предикатов, а процесс проектирования смоделировать процессом логического вывода. Однако обоснование и какие-либо доводы в пользу предикатов, а не других известных методов представления знаний (продукций, фреймов семантических сетей) не приводится. (В этом плане интерес представляет работа [49], посвященная вопросам интеграции знаний при решении задач.)

Система имеет два режима эксплуатации: эксперта и пользователя. В режиме эксперта осуществляется систематизация, формализация, отладка и накопление знаний в БЗ.

В режиме пользователя блоки инструментария включаются в состав системы, решающей проектные задачи. Транслятор переводит задачи из текстовой в графовую форму, в которой осуществляется их решение. Логический, вероятностный и нечеткий вывод представляются в графовой форме. Решение задачи осуществляется в режиме взаимодействия проектировщика с диалоговой виртуальной машиной логического вывода при посредничестве диалогового процессора. Помимо отыскания решения, виртуальные машины вероятностного и нечеткого вывода оценивают также степень истинности этих решений. Извлекатель ответа формирует по построенному логическому выводу ответ на поставленную задачу. Построитель объяснений формирует последовательность заключений, приведшую к решению поставленной задачи или текущему состоянию одной из виртуальных машин.

В то время как САПР, основанная на детерминированных алгоритмах, жестко привязана к задачам, на решение которых она ориентирована,

система, базирующаяся на знаниях, допускает постановку и решение различных задач на одной и той же базе знаний. ЭС-проектирования является гибкой по отношению к решаемым в ней задачам. Она способна заменять проектировщика или помогать ему при решении проектных задач.

Из сказанного выше ни в коей мере не следует, что нужно и детерменированные алгоритмы заменять на алгоритмы вывода. Это, как правило, нецелесообразно и малоэффективно. ЭС хороши для решения трудноформализуемых задач, которые не описываются классическими детерминированными методами.

Отметим, что ЭС-проектирования интенсивно разрабатываются за рубежом (см. [83]). Вопросы, связанные с построением ИСАПР, обсуждаются на многих конференциях по автоматизации проектирования и даже созываются конференции, посвященные только этим вопросам. Это — конференции серии «Экспертные системы САПР» под эгидой рабочей группы 5.2.IFIP. Например, на конференции 1987 г. [67] рассматривались вопросы применения технологии без знаний в САПР, слияния концептуальных и экспертных знаний в САПР, анализа чувствительности базы знаний применительно к ЭС при проектировании механических систем, использования математических знаний в моделях проектирования и т. д. Регулярно выпускаются крупные сборники по проблематике ИСАПР [56, 67, 69, 78].

Затрагиваются вопросы построения ИСАПР и на конференциях по ИИ, так, например, на 4-й конференции по применениям ИИ значительное внимание было уделено вопросам интеллектуальной поддержки САПР.

В СССР этим вопросам пока уделяется явно недостаточное внимание, особенно на инженерном уровне. Так, первая Всесоюзная конференция по ИИ состоялась в ноябре 1988 г. в Переславле-Залесском. В секции «Интеллектуальные САПР» было прочитано всего около десятка докладов (наиболее интересные приведены в списке литературы [2, 5, 10, 23, 28, 31, 41]).

2. Области применения методов ИИ в САПР. Несмотря на то, что в настоящее время ЭС бурно развиваются, причем имеется большое количество (в том числе и в СССР) различных оболочек ЭС в различных областях (см. [50]), практических реализаций ИСАПР и ЭС-проектирования, особенно на инженерном уровне с выходом на промышленную эксплуатацию,— единицы. Пока еще идет процесс поиска сфер приложения методов ИМ в САПР и их осмысление на теоретическом уровне. На наш взгляд, одной из причин, тормозящих разработку промышленных ИСАПР, является недостаточное знание разработчиками тех классов задач автоматизации проектирования, для решения которых эффективны методы МИ, в частности ЭС. Поэтому ниже дается полученный на основе анализа литературы и собственного практического опыта перечень таких классов задач.

1. Структурный синтез объектов, особенно на ранних стадиях проектирования [4, 9, 10, 17, 34, 40, 47, 61].

2. Поисковое инструирование (изобретательство) [3, 4, 28, 42, 53].

3. Автоматизация и интеллектуализация расчетного анализа, в том числе [8, 11, 14, 20, 21, 25, 45]: дружественный интерфейс; математическое моделирование и синтез расчетных процедур; планирование вычислений; оптимальный выбор моделей расчета; анализ результатов; обучение пользователя; переход от конструкции к ее расчетной схеме; выбор численных методов расчета.

4. Оптимальный выбор характеристик деталей (материал, шероховатость поверхности, размеры и т. п.) в соответствии с существующими стандартами и нормалями на конструктивные элементы [48].

5. Отработка машин, оборудования и технологических процессов [15, 40, 44, 45].

6. Автоматизированная обработка чертежной документации [10, 22, 45].

7. Анализ патентной чистоты [42].

8. Оптимальная компоновка (например, оборудования в отсеке, приборов на щите управления и т. п.).

9. Редактирование формализованных текстов.

10. Представление и анализ идей (а не конкретных технических решений) [24].

11. Автоматизация построения САПР [7].

Отметим, что, согласно проведенным исследованиям [46], наибольший эффект от применения методов ИИ ожидается на ранних стадиях проектирования. Отличительная черта этих стадий — значительный уровень неопределенности, источниками которой могут быть неполнота, обобщенность исходных данных, в том числе внутренняя противоречивость, неоднозначность и размытость задания на проектирование, содержащего приближенные оценки характеристик объекта в виде числовых диапазонов, а также словесное описание целей, ограничений и условий чисто качественного типа; принципиальные ограничения по точности определения количественных параметров и особенно качественных факторов; отсутствие аналитических зависимостей, уравнений, связывающих проектные параметры и критерии, и, как следствие, расплывчатость представлений об их взаимодействии; изменчивый динамический характер причинно-следственных связей при проектировании.

Все отмеченные факторы неопределенности не случайные, а систематические. Это значит, что неопределенность на ранних стадиях проектирования обусловлена сложностью задач, дефицитом информации, лимитом времени на принятие решений, особенностями восприятия, мышления, языка специалистов. Так, неточность и неполнота исходных данных вызваны нечетким, недостаточным знанием характеристик новых материалов, свойств технологических процессов, условий работы новых конструкций. Выбор конструктивно-компоновочной схемы объекта чаще всего определяется неформальными соображениями. Во-первых, это объясняется тем, что многие проектные критерии (масса, габаритные размеры, стоимость проектируемого объекта) могут быть предварительно определены лишь с невысокой степенью точности в виде размытых допусков. Во-вторых, далеко не все свойства конструкции и технологии производства можно оценить количественно. Некоторые свойства проектируемой системы изначально являются сложными и физически неизмеримыми. Из-за отсутствия для таких свойств естественных эмпирических шкал измерения они определяются относительно субъективных эталонов специалистов, сформированных при сравнении и ранжировании вариантов. Сюда относятся качество, надежность, технологичность, ремонтопригодность конструкции. Если рассмотреть сферу производства сложных объектов, например реакторного оборудования, то к числу подобных свойств принадлежит культура производства, уровень квалификации персонала, отработанность методов изготовления конструкций и т. д. Систематическое описание указанных свойств возможно на основе экспертных оценок специалистов, которые становятся все более размытыми по мере увеличения сложности проектируемой конструкции, числа учитываемых признаков и взаимосвязей между ними.

Попытки применения традиционных математических моделей на ранних стадиях проектирования малоэффективны, поскольку эти методы основаны на обработке точных и полных численных данных и не соответствуют высокому уровню неопределенности задачи. Корректность и строгость общепринятых в инженерном анализе расчетных процедур не обеспечивает требуемого смыслового охвата в ситуации поискового конструирования. При переходе от конструкции к ее расчетной схеме — разновидности информационной модели, описанной классическими диффе-

ренциальными уравнениями и прочими жесткими формальными структурами,— возможна потеря специфики (семантики) качественных факторов [47]. Это объясняется тем, что традиционный математический аппарат инженерных расчетов создан для работы на формальном уровне анализа и почти полностью отвлекается от семантических и прагматических аспектов информации, которые имеют наибольший удельный вес на ранних стадиях проектирования.

Следовательно, при моделировании деятельности человека на ранних стадиях проектирования необходимо применять гибкий аппарат представления знаний, особенно методы представления нечетких знаний. Такие методы в настоящее время достаточно хорошо развиты, например аппарат лингвистических переменных, нечетких множеств [87] теории возможностей [65] и др. Отсюда следует вывод о том, что инструментальные средства ИСАПР обязательно должны допускать представление нечетких знаний, что мы и наблюдаем на практике (см. упоминание ИС-проектирования [40]).

Перейдем далее к краткой характеристике некоторых областей применения методов ИИ в САПР.

2.1. Структурный синтез. Задачи структурного синтеза являются типичными для САПР машиностроительного профиля. Эти задачи определения состава проектируемого объекта и установления связей между его составляющими. Применение ЭС прежде всего целесообразно для тех классов машиностроительных объектов, где велика степень унификации составляющих узлов и деталей. В этом случае перед конструктором стоит задача, исходя из требований технического задания, определить: состав будущего объекта на уровне типовых составляющих элементов; подобрать для каждого типа его конкретный экземпляр; проверить допустимость объединения выбранных экземпляров узлов и деталей в конструкцию.

Подбор экземпляров производится на основе анализа каталога (банка) унифицированных узлов. Допустимость соединения может устанавливаться исходя из опыта конструирования данного класса объектов, проверки соблюдения требований технического задания, а также путем проведения некоторых расчетов с целью определения значений, участвующих в критериях оценки параметров.

ЭС здесь позволяют формализовать (т. е. упорядочить, что уже ценно само по себе) знания и опыт квалифицированных специалистов и тиражировать его, существенно облегчить работу не только рядового специалиста но и самого эксперта, избавив их от необходимости помнить многочисленные проверки. ЭС структурного синтеза с успехом могли бы использоваться в качестве обучающих.

О том, что задачи структурного синтеза успешно решаются с помощью технологии без знаний, свидетельствует ряд известных примеров: комплектация оборудования электростанций [40], формирование облика ядерных реакторов [17—19] и др.

2.2. Поисковое конструирование. Принципиальное отличие задач поискового конструирования от задач структурного синтеза состоит в том, что они связаны с генерацией новых, ранее неизвестных технических решений, в том числе и на уровне изобретений. В интеллектуальных системах поискового конструирования должны моделироваться творческие способности человека, что является очень сложной задачей. Наряду с разработкой специфических методов решения поисковых задач здесь правомерно поставить вопрос и об использовании теории и методов ИИ. Ответ на него не очевиден и требует детального исследования.

Предположение о возможности строить поисковые системы как ЭС, базируется на том, что здесь также присутствует эксперт (изобретатель), знания которого необходимо извлечь и формализовать, причем важно формализовать стратегии генерации изобретений. Подобные ЭС, в частно-

сти, могли бы играть роль подсказчика и возбудителя (стимулятора) творческой фантазии изобретателя.

Конкретные подходы к решению задач поискового конструирования с помощью ЭС приведены в [3, 53]. В проекте «Изобретающая машина» используется аппарат теории решения инженерно-изобретательских задач (ТРИЗ), в том числе законы развития технических систем, алгоритм решения изобретательских задач, информационный фонд эффектов, принципы разрешения технических и физических противоречий и т. д. Система предназначена для самого верхнего уровня в иерархии интеллектуальных САПР, причем она развивается, в отличие от известных подходов и интеллектуализации САПР, в направлении поддержки теории развития технических систем. Цель проекта будет достигнута, когда новое техническое решение, предложенное системой немедленно, будет детализироваться в ИСАПР более низкого уровня.

Другой подход к созданию интеллектуальных систем поддержки изобретательской деятельности демонстрируется в [3, 4]. Здесь для представления знаний о единичном техническом решении используются фреймы. Описание множества технических решений осуществляется в виде семантической сети как (И — ИЛИ) дерева конструктивных элементов, где знания о методах проектирования представляются продукциями. Таким образом, в этой работе продемонстрирована возможность применения сложившейся технологии создания ЭС к области решения изобретательских задач. Система создавалась для генерации новых технических решений для класса виброзащитных устройств. Интересно отметить, что автору удалось получить более 150 новых технических решений виброзащитных устройств, но не в процессе эксплуатации ЭС, а в процессе ее разработки, т. е. фактически при формализации и структуризации знаний о путях создания виброзащитных устройств. Это еще раз подтверждает всю сложность создания действительно интеллектуальных, способных самостоятельно получать новые технические решения систем. В настоящее же время создаются системы, способные советовать пользователю пути решения задач, т. е. освобождаем его, как правило, от нетворческой, рутинной работы, в частности от необходимости помнить большое число критериев, правил, параметров и т. д.

2.3. Расчетный анализ. Типовой компонентой САПР является подсистема инженерного анализа, в функции которой входит проведение всевозможных расчетов, необходимых при проектировании объекта. В развитых САПР эта подсистема обычно реализуется в виде ППП. Методы ИИ находят в настоящее время широкое применение при построении интеллектуальных ППП. Действенным средством интеллектуализации ППП стали ЭС, выступающие в качестве интеллектуальной надстройки над пакетом. Развиваются гибридные ЭС, объединяющие на основе методов ИИ проведение обычных детерминированных расчетов и вывод из базы знаний.

В качестве частных задач интеллектуализации ППП с использованием ЭС отметим следующие.

1. ЭС — советчик пользователя при задании исходных данных в сложных расчетах. Такая система фактически является универсальным семантическим анализатором входной информации и может значительно облегчить работу пользователя, не знакомого с тонкостями расчетной модели (именно таковыми являются пользователи САПР), предостеречь его от задания таких данных, которые приводят к неверным результатам или «авариям» типа деления на нуль, отрицательного подкоренного выражения и т. д., объяснить на содержательном уровне недопустимость вводимых данных.

2. Одной из существенных проблем проведения расчетов является проблема построения расчетной схемы изделия, которая для расчетной программы является жесткой. Нужно уметь правильно свести рассчиты-

ваемую конструкцию к заданной расчетной схеме или показать невозможность выполнения расчетов по данной программе. Обычно этой работой занимаются опытные специалисты, что не позволяет широко использовать имеющийся программный фонд в САПР.

3. Анализ результатов расчетов. Опытный специалист сразу по виду полученных результатов может определить их ошибочность и причину, вызвавшую ошибку. Провести такой анализ пользователю САПР трудно. Здесь мы имеем задачу диагностики, на решении которой ЭС себя уже хорошо зарекомендовали [36, 50].

4. Задачи оценки проектных решений. При разработке САПР достаточно часто встречаются серьезные трудности с формализацией критериев оценки принятия решений. Во многих случаях не удается построить целевую функцию и строго определенное множество ограничений, т. е. не удается поставить задачу оптимизации в строгом смысле, как задачу поиска экстремума целевой функции. На практике в этом случае разрабатываются диалоговые системы, в которых оценка оптимальности полученных результатов остается за человеком, а поиск оптимального решения ведется итерационно. Такую «оптимизацию», в отличие от классической, мы берем в кавычки. Она широко распространена в практике создания САПР.

При работе с подобными диалоговыми системами возникают следующие трудности: каким образом видоизменять параметры, чтобы двигаться в нужном направлении поиска «оптимального» решения? как оценить, «оптимально» полученное на некотором шаге итерации решение или нет? Ясно, что ответы на эти вопросы имеются у экспертов. Следовательно, путь решения задачи — формализация знаний экспертов и включение в состав ИСАПР ЭС поиска «оптимального» решения.

2.4. Отработка машин, оборудования и технологических процессов. Важная область применения ЭС — отработка сложных объектов [44], т. к. обеспечение конкурентоспособности и надежности создаваемой техники связывают с тщательностью ее отработки до запуска в производство.

Проблемная область отработки объектов достаточно велика. Например, в процессе создания и освоения производства новой машины тщательной отработке подлежат конструкции машин, система «оператор — машина — среда», новые технологические процессы и технологическое оборудование, система управления производством машины. Отработка сложного объекта — интеллектуальный процесс, осуществляемый в условиях неполной информации. Программа испытаний разрабатывается на стадии проектирования. Поэтому ЭС для отработки объектов должна являться составной частью интегрированной САПР.

В ленинградском филиале ИМАШ АН СССР ведется разработка оболочки ЭС для отработки сложных объектов машиностроения. Конкретные знания в экспертную оболочку вводятся по предложенным формам специалистами-профессионалами высокой квалификации в данной предметной области. Инвариантные средства оболочки включают представление знаний по технологии, информационным и математическим моделям, правила принятия решений типа «если — то», обучающий курс.

Технология отработки объектов в ЭС представлена логически законченной последовательностью процедур: прогнозирование процесса отработки; моделирование процесса отработки — выбора структуры программы испытаний, планирование процесса отработки — детализации программы испытаний; проведения испытаний и принятия решений; обработки протоколов действий ЛПР и испытаний объектов. Первые три процедуры выполняются на стадии проектирования, остальные — на стадии испытаний объекта. Каждая из процедур состоит из последовательности операций. Технология ЭС включает в себя до 50 операций. Примерно около трети из них выполняются только с использованием правил принятия

Таблица

Использование ЭС в АСТПП

Название	Область применения	Год создания	Язык программирования	Операционная система	Тип ЭВМ
FOREST	Диагностика	1984	Пролог	–	VAX 11/780
GARI	Планирование технологического процесса резания	1981	MACLISP	MULTICS	HB-68
SIPP	Планирование процессов технологической обработки	1985	Пролог	–	–
TOM	Планирование процессов технологической обработки сверления отверстий	1982	Паскаль		VAX – 11
GGMPO	Автоматизация формообразования	1985	Пролог	UNIX	VAX 11/750
CUTTECH	Выбор средств технологической обработки резанием	1984	–	–	–
EXCAP	Планирование технологической обработки деталей вращения	1984	Паскаль	VMS	11/750

решений в условиях неопределенности типа «если – то», по аналогии и др., сформулированных на основе суждений и высказываний (опыта и интуиции) специалистов высокой квалификации. Остальные операции являются или вычислительными или информационными.

В основу технологии ЭС, инвариантной для разных объектов, положена классическая схема управления сложным объектом с движением по выбранной траектории и коррекцией в случае отклонения от нее.

За рубежом вопросам использования ЭС в автоматизированных системах технологической подготовки производства (АСТПП) уделяется большое внимание. В подтверждение этому ниже приводится таблица, в которой дан ряд ЭС в этой области; составленная по данным [15, 60, 62, 63, 68].

3. Методы ИИ в проектировании и эксплуатации ядерных энергетических установок. Применение ИСАПР дает наиболее значительный эффект, особенно в плане повышения качества проектов и надежности эксплуатации, при проектировании очень сложных объектов. С этой точки зрения представляет интерес, как обстоят дела с ИСАПР при проектировании ЯЭУ. Рассмотрим ИСАПР ФОРА (Формирование Облика Реактора Атомного) [17–19]. Это одна из первых отечественных САПР ЯЭУ, в которой последовательно был реализован принцип построения «от знаний». В ней удалось преодолеть противоречие между разобщенностью разработчиков и единством проектирования ЯЭУ путем замены непосредственного взаимодействия проектировщика с узкими специалистами на взаимодействие с САПР, использующей их формализованные знания.

САПР ФОРА позволяет пользователю – конструктору в режиме диалога «собрать» конструкцию ЯЭУ из типовых конструктивных элементов (КЭ), провести расчетный анализ каждого КЭ и ЯЭУ в целом. В базе знаний системы находится информация, описывающая конструкцию ЯЭУ, отражающая накопленный опыт проектирования и включающая в себя выделенное по функциональным признакам множество допустимых связей, определяющих возможные варианты структуры ЯЭУ. Знания о конструкциях ЯЭУ представлены в виде сети иерархий.

Знания по расчету конструкции представлены в виде ППП. Однако с хорошей степенью адекватности представлять такие знания только пакетом программ не удается, поскольку специалисты на основе своего опыта и интуиции, как правило, вносят поправки в полученные результаты. Поэтому система использует дополнительно экспертные знания,

формализованные в виде поправочных коэффициентов и соответствующие пессимистической, нейтральной и оптимистической экспертной оценкам.

Подход «от знаний» при решении задач проектирования ЯЭУ в САПР ФОРА позволил обеспечить быстрое, простое и надежное расширение возможностей системы в части генерации новых вариантов ЯЭУ за счет добавления в базу знаний информации о новых КЭ или типах ЯЭУ; удобный и легко перестраиваемый диалог пользователя с ЭВМ; настройку инвариантного ядра системы на новые предметные области, в частности машиностроительные агрегаты, процесс проектирования которых близок к ЯЭУ.

В заключение остановимся на системах диагностики и системах типа «советчик оператора» для ЯЭУ. Хотя эти системы прямо не связаны с ИСАПР, однако имеют очень важное значение для безопасности эксплуатации установок и в силу этого быстро развиваются. ЭС является основным инструментарием для разработки подобных систем. Знания по диагностике и опыт по управлению установками хорошо описываются фреймово-продукционными моделями представления знаний, характерными для ЭС. Классический процедурный подход здесь малоэффективен. Типичные примеры правил из базы знаний диагностической системы:

Если ⟨Ситуация⟩ то ⟨Причина⟩ и ⟨Совет⟩
Если ⟨ТЦНПК больше 185⟩
то ⟨снижение расхода 3-го контура⟩
и ⟨Проверьте полное открытие арматуры отсечки ЦНПК 3-го контура.
При сохранении предупредительной сигнализации
переведите М3К и М4К на БС
или
Переведите ЦНПК на МС
или
Остановите аварийный ЦНПК⟩
Если ⟨Р/К больше 20⟩
то ⟨неисправность пока не обнаружена⟩
и ⟨Приведите давление в I контуре в норму путем откачки в запасные баллоны⟩

Активно проводятся такие работы и за рубежом.

Общий принцип работы советчика оператора может быть следующим. С заданным интервалом периодически опрашиваются все датчики. Данные от них поступают в базу фактов. Также периодически последовательно проверяются все правила в базе знаний. Результаты по сработавшим правилам выдаются на устройство визуализации в зависимости от установленных приоритетов.

Познакомиться с принципами построения указанных систем и примерами их промышленной реализации можно по публикациям [51, 52].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев А. В., Попов В. А., Фомин С. А.* Инструментальная экспертная система для задач проектирования и диагностики сложных технических систем // Методы и системы принятия решений. Вопросы создания экспертных систем. Рига: РПИ, 1983.
2. *Алексеев А. В., Попов В. А., Фомин С. А.* Протей: инструментальный комплекс для построения гибридных экспертных систем. Всесоюз. конф. по искусственному интеллекту. Тез. докл. Т. 2. М.: ВИНИТИ, 1988.
3. *Андрейчиков А. В.* Экспертная система для начальных стадий проектирования технических систем // Программные продукты и системы. 1989. № 2.
4. *Андрейчиков А. В., Дворянкин А. М., Половинкин А. И.* Об использовании экспертных систем в автоматизированном банке инженерных знаний для поискового проектирования и конструирования // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. 1989. № 1.
5. *Богданович И. А., Клебанов Б. И., Парфенов Ю. П.* Интеллектуальная система проектирования пакетов САПР // Всесоюз. конф. по искусственному интеллекту. Тез. докл. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1988.

6. *Борисов А. Н.* Системы, основанные на знаниях, в автоматизированном проектировании. Методическая разработка. Рига: РПИ, 1989.
7. *Бугрименко Г. А., Копов А. С.* Возможности автоматизации начальных стадий создания САПР с использованием экспертных систем // Экспертные системы в научных исследованиях, автоматизации проектирования и производства. Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. семинар (Саратов, сентябрь 1988). М.: ЦНИИАТОМИНФОРМ, 1988.
8. *Бычков И. В., Диваков О. Г., Кузьмин В. А.* О поддержке знаниями технологии решения задач // Управляющие системы и машины. 1988. № 5.
9. *Вагин В. Н., Голубев Э. В., Климов В. Е.* Формализация задачи синтеза структур машиностроительных объектов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 1.
10. *Висикирский В. А.* Применение методов искусственного интеллекта в диалоговых графических САПР // Всесоюз. конф. по искусственному интеллекту. Тез. докл. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1988.
11. *Волков Ю. В., Куприянов Д. И.* Возможности и проблемы разработки экспертных систем автоматизации проектирования // Система автоматизированного проектирования: вопросы повышения интеллектуальности. М.: ЦНИИАТОМИНФОРМ, 1987.
12. *Галаган Н. И., Рабинович З. Л.* Интеллектуальные решающие системы // Кибернетика. 1986. № 3.
13. *Дзенгелевский А. Е.* Навигационная экспертная система по статистике // Тез. докл. конф. Диалог «человек – ЭВМ». Ч. 1. Базы знаний и экспертные системы. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1989.
14. *Диваков О. И., Кузьмин В. С. и др.* Интеллектуальные пакеты прикладных программ // Представление знаний в человеко-машинных и робототехнических системах. Т. С. М.: ВИНИТИ, 1984.
15. *Ивата К., Сугимура М.* Интегрированная система автоматизированного проектирования и планирования технологических процессов, основанная на знаниях о точности обработки деталей // Конструирование и технология машиностроения. 1988. № 1.
16. Интеллектуальные системы автоматизированного проектирования больших и сверхбольших интегральных схем/Под ред. В. А. Мищенко. М.: Радио и связь, 1988.
17. *Карабасов А. С., Микишев В. В.* Современное состояние и перспективы развития систем автоматизированного проектирования ядерных реакторов // Системы автоматизированного проектирования. Тез. докл. 2-го отраслевого совещания по САПР. Горький: ГПИ, 1987.
18. *Карабасов А. С., Микишев В. В., Рябинин В. П.* Использование знаний в системе автоматизированного проектирования ядерных реакторов // Автоматизация производства систем программирования. Тез. докл. III Всесоюз. конф. Таллинн: ТПИ, 1986.
19. *Карабасов А. С., Микишев В. В. и др.* Обликовая задача оптимизации ядерного реактора // Вопросы безопасности и надежности при оптимизации ядерных энергетических установок. Горький: ГПИ, 1985.
20. *Кахро М. И., Калья А. П., Тыугу Э. Х.* Инструментальная система программирования ЕС ЭВМ (ПРИЗ). М.: Финансы и статистика, 1988.
21. *Ковалевская Ж. В.* Вопросы архитектуры и программного обеспечения экспертных систем и интеллектуальных ППП // Проектирование и разработка пакетов программ. Сб. науч. тр. Киев: ИК АН УССР, 1987.
22. *Коов М. И., Мацкин М. Б., Тыугу Э. Х.* Интеграция концептуальных и экспертных знаний в САПР // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1988. № 5.
23. *Кручинин В. В., Одиноков В. В.* Интеллектуальный пакет прикладных программ имитационного моделирования сложных технических систем // Всесоюз. конф. по искусственному интеллекту. Тез. докл. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1988.
24. *Кузин Л. Т., Стрижевский В. С.* Направления интеллектуализации САПР // Системы автоматизированного проектирования. Вопросы повышения интеллектуальности. М.: ЦНИИАТОМИНФОР, 1987.
25. *Кузьмин В. А.* Работа пакета прикладных программ под управлением базы знаний (на примере ППП Моделирование) // Пакеты прикладных программ. Итоги и применения. Новосибирск: Наука, 1986.
26. *Кулон Ж. Л., Сабоннадьер Ж. К.* САПР в электротехнике: Пер. с франц. М.: Мир, 1988.
27. *Курейчик В. М.* К вопросу создания интегрированных интеллектуальных САПР СБИС // Автоматизация проектирования электронной аппаратуры. Межведомственный тематический науч. сб. Вып. 5. Таганрог: ТРТИ, 1988.
28. *Курьян А. Г., Лесковец Е. А. и др.* Интеллектуальная система поддержки решения изобретательских задач // Всесоюз. конф. по искусственному интеллекту. Тез. докл. Т. 2. М.: ВИНИТИ, 1988.
29. *Лайбек Дж. Р.* Система искусственного интеллекта, способная к быстрой перестройке // Электроника. 1987. № 13.

30. *Латомб Ж. К.* Искусственный интеллект в автоматизированном проектировании: система Тропик // Системы автоматизированного проектирования/Под ред. Дж. Аллена: Пер. с англ. М.: Наука, 1985.
31. *Макаров И. М., Рахманкулов В. З. и др.* Гибридная экспертная система для предэскизного проектирования ГАП // Всесоюз. конф. по искусственному интеллекту. Тез. докл. Т. 2. М.: ВИНИТИ, 1988.
32. *Малахов Н. М.* Подсистема объяснения решений в САПР // Моделирование процессов принятия решений в интегрированных системах управления. Сб. науч. тр. Киев: ИК АН УССР, 1988.
33. *Михайлов В. М.* Архитектура инструментального ядра САПР в составе комплексных автоматизированных систем управления // Проблемы автоматизированного проектирования в машиностроении (САПР-88).
34. *Перфильев С. А., Тарасов В. Б.* Построение интеллектуальной системы формирования и выбора конструктивно-технологических решений изделий из композиционных материалов // Программное обеспечение новой информационной технологии. Всесоюз. науч.-техн. совещание. Калинин: Центрпрограммсистем, 1989.
35. *Попов Э. В.* Экспертные системы: состояние, проблемы, перспективы // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 5.
36. *Поспелов Г. С.* Искусственный интеллект – основа новой информационной технологии. М.: Наука, 1988.
37. *Поспелов Г. С., Эрлих А. И.* Расчетно-логические системы // Представление знаний в человеко-машинных и робототехнических системах. М.: ВИНИТИ, 1984. Т. С.
38. *Поспелов Д. А.* Моделирование рассуждений. М.: Радио и связь. 1989.
39. *Поспелов Д. А.* Ближайшее будущее искусственного интеллекта // Всесоюз. конф. по искусственному интеллекту. Тез. докл. Т. 1. М.: ВИНИТИ, 1988.
40. *Прихожий А. А., Толкачев А. А.* Экспертная система как средство поддержки проектно-конструкторских работ // Управляющие системы и машины. 1989. № 3.
41. *Пшеничный П. В.* О некоторых применениях методов искусственного интеллекта в САПР // Всесоюз. конф. по искусственному интеллекту. Тез. докл. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 3.
42. *Самохвалов А. Г.* Проблемы создания и использования экспертных систем в области изобретательства // Междунар. симпоз. INFO 89. Т. 1. Минск: Наука и техника, 1989.
43. *Самущенко Л. М., Рабинович М. И., Шумилов И. С.* Экспертные системы как средство автоматизации конструирования сложных резервированных систем самолетов // Программное обеспечение новой информационной технологии. Всесоюз. науч.-техн. совещание. Калинин: Центрпрограммсистем, 1989.
44. *Соложенцев Е. Д.* Построение экспертной системы для отработки машин, оборудования и технологических процессов // Управляющие системы и машины. 1989. № 3.
45. *Тамм Б. Г., Тыугу Э. Х.* Представление машиностроительных моделей в базах знаний и персональных САПР // Вестн. АН СССР. 1988. № 5.
46. *Тарасов В. Б., Чернышев А. П.* Оптимизация деятельности проектировщика на ранних стадиях разработки летательных аппаратов // Проблемы эргономического обеспечения проектирования технических средств. Тр. ВНИИТЭ. Сер. «Эргономика». Вып. 36. М.: ВНИИТЭ, 1988.
47. *Тарасов В. Б., Чернышев А. П.* Эргономическое обеспечение процессов разработки летательных аппаратов // Кибернетика и вычислительная техника. Вып. 84. Эргатические системы управления. Киев: Наук. думка, 1989.
48. *Толкачев А. А.* О средствах проектирования экспертной программы «Консультант конструктора» // Управляющие системы и машины. 1988. № 1.
49. *Тыугу Э. Х.* Интеграция знаний // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1989. № 5.
50. *Уотермен Д.* Руководство по экспертным системам: Пер. с англ. М.: Мир, 1989.
51. *Франко Р. Т., Чачко А. Г.* Экспертная система для поддержки решений операторов атомных электростанций // Международная конф. по взаимодействию «человек-машина» в атомной промышленности. Вена: Магатэ, 1988.
52. *Чачко А. Г.* Подготовка операторов энергоблоков. М.: Энерогатомиздат, 1986.
53. *Цуриков В. М.* Проект «Изобретающая машина» // Междунар. симпоз. INFO'89. Т. 1. Ч. 2. Минск: Наука и техника, 1989.
54. Экспертные системы: принципы работы и примеры/Под ред. Ф. Форсайта. М.: Радио и связь, 1987.
55. *Эрлих А. И.* Диалоговая система моделирования альтернатив и выбора решений в проектировании // Представление знаний в человеко-машинных и робототехнических системах. Т. С. М.: ВИНИТИ, 1984.
56. Applications of Artificial Intelligence in Engineering Problems/Ed. by D. Sriram, R. Adey. Berlin: Springer, 1986.
57. Artificial Intelligence Developments and Applications/Ed. by G. S. Gero and R. Stanton. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1988.
58. Artificial Intelligence in Manufacturing/Ed. by T. Bernold. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1987.

59. *Balducelli C., Federico A., Iannucci R., Sepielli M.* Development of on-line early fault detection experti system using an advanced man-machine interface // Int. Conference on Man-Machine Interface in the Nuclear Industry (Control and Instrumentation, Robotics and Artificial Intelligence). Tokyo, 15–19 February 1988.
60. *Barkocy W. E., Zdeblick W. J.* A knowledge based system for machining operation planning // Proc. of Autofact. 1984. V. 6.
61. *Das M. L.* Knowledge base for structural design // Application of Artificial Intelligence in Engineering Problems/Ed. by D. Sriram, R. Adey. Berlin: Springer, 1986.
62. *Davis B. J., Darbyshire I. L.* The use of expert systems in process planning // Annals of CIRP. 1984. V. 33.
63. *Descotte Y., Latombe J. C.* GARI: an expert system for process planning // Solid Modelling by Computers/Ed. by M. S. Pickett, T. W. Boyse. N. Y.: Plenum Press, 1987.
64. *Di Primio F.* An integrated tool for building expert systemsstate and future requirements // Expert Systems and Knowledge Engineering/Ed. by T. Berlond: Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1986.
65. *Dubois D., Prade H.* Theorie des possibilites: Application a la representation des connaissances en informatique. Paris: Masson, 1985.
66. *Embrey D. E.* Modelling and assisting the operators diagnostic strategies in accident sequences // IFAC Man-Machine Systems Symposium, Verese, Italy, 1985.
67. Expert Systems in Computer-Aided Design/Ed. by J. S. Gero. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1987.
68. Expert systems in manufacturing // Expert Systems Strategies. 1988. V. 4. № 3.
69. Expert Systems in Production Engineering/Ed. by G. Menges et al. Berlin: Springer, 1987.
70. *Finin T., McAdams J., Kleinosky P.* FOREST: an expert system for automatic test equipment // Proc. IEEE Computer Society Conference on AI Applications, 1984.
71. *Foyano P., Perini C.* TURBOSTART: an expert system as operator guide // IEEE 4-th Conf. on Human Factors and Power Plants, Monterey. 1988.
72. *Grogitzki G.* Expert system environment/VM applications in manufacturing // Exeprt Systems in Production Engineering/Ed. by G. Menges et al. Berlin: Springer, 1987.
73. *Heragu S. S., Kusiak A.* Analysis of expert systems in manufacturing design // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1987. V. SMC-17.
74. *Jocnkers V.* Design, a challenge for AI // Artificial Intelligence in Manufacturing/ Ed. by T. Bernold. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1987.
75. *Kaplan S., Frank M. V. et al.* Outline of COPILOT, an expert system for reactor operational assistance, using a Bayesian diagnostic module // Reliability Engineering and Systems Safety. 1988. V. 22. № 1–4.
76. *Kato K., Watanabe T. et al.* MITI project on advanced manmachine System for nuclear power plants // Int. Seminar on Human Interface, Tokyo, 1988.
77. Knowledge Engineering and Computer Modelling in CAD/Ed. by A. Smith. London: Butterworths, 1986.
78. Knowledge Engineering in Computer-Aided Design/Ed. by G. S. Gero. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1985.
79. *Lee Y. M., Kim H. K. et al.* The development of a prototype expert system as an aid to emergency operating procedures // Int. Conference on Nuclear Power Performance and Safety. V. 4. Safety Technology. 1987.
80. *Martin E. A.* Toward a more systematic, efficient design process: the potential impact of intelligent design aids // System Design. Behavioral Perspectives on Designers, Tools and Organizations/Ed. by W. B. Rouse, N. K. Boff. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1987.
81. *Ohsuga S.* Conceptual design of CAD systems involving knowledge bases // Knowledge Engineering in Computer-Aided Design/Ed. by G. S. Gero. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1985.
82. *Rehak D. R., Howard H. C., Sriram D.* Architecture of an integrated knowledge based environment for structural engineering applications // Knowledge Engineering in Computer-Aided Design./Ed. by G. S. Gero. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1985.
83. *Rychener M. D.* Expert systems for engineering design // Expert Systems. 1985. V. 2. № 1.
84. *Tomiyama T., Yoshikawa H.* Requirements and principles for intelligent CAD systems // Knowledge Engineering in Computer-Aided Design/Ed. by J. S. Gero. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1985.
85. *Tomiyama T., Yoshikawa H.* Organization of design knowledge in an intelligent CAD environment // Expert Systems in Computer-Aided Design/Ed. by J. S. Gero. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1987.
86. *Walker T. S., Miller R. K.* Exper systems 1987. An assessment of technology and applications // SEAI. Technical Publications. Madison GA. 1987.
87. *Zadeh L. A.* Fuzzy sets and applications. Selected papers/Ed. by R. R. Yager et al. N. Y.: Wiley-Interscience, 1987.

Москва

Поступила в редакцию
30.III.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И УСТРОЙСТВА В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.9

В. Л. ВОЛКОВ, П. В. ПАКШИН

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЧИСЛОВАЯ СИСТЕМА В АЛГОРИТМАХ УПРАВЛЕНИЯ И ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ

Разработана программная версия логарифмической числовой системы для типовых микропроцессоров Intel 8080, Intel 8086. Показано, что при использовании логарифмической арифметики на процессоре Intel 8080 реализуются быстродействующие алгоритмы управления, которые не реализуемы на этом процессоре при использовании традиционных числовых систем с фиксированной и плавающей точкой. Анализ проведен на примере программной реализации стационарного фильтра Калмана и линейного алгоритма управления.

Введение. В настоящее время часто возникает необходимость обработки цифровой информации с высокой скоростью, умеренной точностью и в широком динамическом диапазоне. Примером могут служить системы автоматического управления реального времени, использующие оценивание вектора состояния объекта управления и реализующие алгоритмы оптимального управления.

Традиционные числовые системы представления цифровой информации с фиксированной и плавающей точками не дают достаточного быстродействия в широком динамическом диапазоне чисел (особенно арифметика на основе числовой системы с плавающей точкой). Кроме того, применение арифметики с фиксированной точкой требует большой подготовительной работы по масштабированию переменных. Арифметика, основанная на числовой системе в остаточных классах [1], дает высокую скорость в цифровых алгоритмах, но трудноприменима из-за сложности операций масштабирования, округления, сравнения. Существующие исследования логарифмической арифметики [2, 3] показывают ее существенные преимущества по быстродействию относительно арифметики с плавающей и даже с фиксированной точками. Однако применение логарифмической числовой системы в цифровых алгоритмах эффективно при соответствующем согласовании с датчиками первичной информации и потребителями результатов работы цифровых алгоритмов, например аппаратными средствами [2] или программными средствами [4]. Разработке вопросов применения логарифмической числовой системы в цифровых алгоритмах в настоящее время уделяется серьезное внимание. Разрабатываются быстродействующие спецпроцессоры с логарифмической арифметикой [3], решаются вопросы совмещения преимуществ арифметики с плавающей точкой и логарифмической арифметики в едином процессоре [5].

В данной статье приводятся краткие сведения о логарифмической числовой системе, исследуется разработанная авторами программная реализация логарифмической арифметики и алгоритмов согласования числовых систем на типовых микропроцессорах. В статье разработаны вопросы

организации линейного алгоритма управления в пространстве состояний объекта управления, проведен анализ быстродействия цифрового алгоритма управления при использовании программных моделей логарифмической числовой системы для микропроцессора Intel 8080 (КР580ВМ80А).

1. Краткая характеристика логарифмической числовой системы. Логарифмическая числовая система [6] основана на логарифмическом представлении чисел. В данной работе используется следующий вариант представления числа X:

$$X = \mathrm{Sign}(X) D^{e_L},$$

где $e_L = \log_D |X|$ — число, содержащее целую и дробную части. Логарифмический формат числа X содержит знаковый разряд числа и логарифма, а также разряды целой и дробной частей логарифма. Знак числа кодируется единицей для минуса и нулем для плюса; знак логарифма числа кодируется единицей для плюса и нулем для минуса. Отрицательные значения логарифмов чисел представляются в дополнительном коде. В 8-разрядном логарифмическом формате три младших разряда предназначены для дробной части логарифма, три следующих разряда — для целой части, разряд, предшествующий логарифму числа, предназначен для знака логарифма, последний (старший) разряд предназначен для знака числа. В 16-разрядном логарифмическом формате для дробной части логарифма предназначены восемь младших разрядов, для целой части — следующие шесть разрядов, затем следуют два более старших разряда: знак логарифма и знак числа.

Рассмотрим реализацию основных арифметических действий в логарифмической числовой системе. Наиболее просто реализуются операции умножения и деления. Логические условия работы алгоритма умножения чисел X и Y по всем разветвлениям отражены в табл. 1.

В этой таблице X произвольная величина $k=0{,}1$.

Алгоритм деления чисел X, Y в логарифмическом формате во многом сходен алгоритму умножения. Исключение составляет обработка аномальных исходных данных: деление ноль на ноль; деление ноль на число; деление числа на ноль. Условия работы алгоритма деления по всем ветвям представлены в табл. 2.

В алгоритме сложения знаковых чисел логарифм результата

$$e_Z = \log_D |X+Y| \tag{1.1}$$

вычисляется с использованием таблицы корректирующих значений. Например, при исходных числах X и Y одинакового знака и при условии $e_X > e_Y$ логарифм результата вычисляется в виде

$$e_Z = e_X + F_1(e_X - e_Y), \tag{1.2}$$

где $F_1(e_X - e_Y)$ — корректирующее значение. В работе [2] функция $F_1(e_X - e_Y)$ найдена теоретически путем простых преобразований (1.1) и (1.2):

$$F_1(k) = \log_D (1 + D^{-K}), \tag{1.3}$$

где $K = e_X - e_Y$.

Кроме рассмотренного варианта сложения (вычитания), в логарифмическом формате следует выделить еще варианты: X и Y одинакового знака и $e_X \leqslant e_Y$; X и Y разного знака и $e_X > e_Y$; X и Y разного знака и $e_X \leqslant e_Y$. Аналогичными преобразованиями получены соотношения для вычисления результата для всех вариантов. Эти соотношения сведены в табл. 3.

2. Программная реализация логарифмической числовой системы. Операции умножения, деления, сложения и вычитания в логарифмической числовой системе были реализованы программно в соответствии с табл. 1.1—1.3 на распространенных микропроцессорах серий Intel 8080 (КР580ВМ80А) и Intel 8086 (К1810ВМ86). Проведено сравнение основ-

Таблица 1

X	Y	Sign e_X	Sign e_Y	Sign e_Z	Результат
$\neq 0$	$\neq 0$	1	0	k	$e_Z=e_X+e_Y$
$\neq 0$	$\neq 0$	0	1	k	$e_Z=e_X+e_Y$
0	x	0	k	k	$Z=0$
x	0	k	0	k	$Z=0$
$\neq 0$	$\neq 0$	1	1	0	$e_Z=e_X+e_Y$
$\neq 0$	$\neq 0$	1	1	1	$\|e_Z\|=\max$
$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	0	$Z=0$
$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	1	$e_Z=e_X+e_Y$

Таблица 2

X	Y	Sign e_X	Sign e_Y	Sign e_Z	Результат
0	x	0	0	k	$Z=0$
$\neq 0$	0	0	0	k	$\|e_Z\|=\max$
$\neq 0$	$\neq 0$	1	1	k	$e_Z=e_X-e_Y$
$\neq 0$	$\neq 0$	1	0	1	$\|e_Z\|=\max$
$\neq 0$	$\neq 0$	1	0	0	$e_Z=e_X-e_Y$
$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	k	$e_Z=e_X-e_Y$
$\neq 0$	$\neq 0$	0	1	1	$e_Z=e_X-e_Y$
$\neq 0$	$\neq 0$	0	1	0	$Z=0$

Таблица 3

Исходные операнды				Результирующий операнд
Sign X	Sign Y	$e_X > e_Y$	Sign Z	
1	1	1	1	$e_Z=e_X+F_1(K)$
1	1	0	1	$e_Z=e_Y+F_1(N)$
1	0	1	1	$e_Z=e_X+F_2(K)$
1	0	0	0	$e_Z=e_Y+F_2(N)$
0	1	1	0	$e_Z=e_X+F_2(K)$
0	1	0	1	$e_Z=e_Y+F_2(N)$
0	0	1	0	$e_Z=e_X+F_1(K)$
0	0	0	0	$e_Z=e_Y+F_1(N)$

В таблице обозначено $F_2(N)=\log_D(1-D^{-N})$; $N=e_Y-e_X$.

Таблица 4

Параметр арифметики	Логарифмическая арифметика (8 разрядов)	Арифметика с фиксированной точкой (16 разрядов)
Максимальное время выполнения (тактов):		
сложение	122	72
умножение	90	695
деление	96	660
Динамический диапазон чисел	$5.86\cdot 10^4$	$3.2768\cdot 10^4$
Максимальная относительная погрешность	0.045	1.0

ных характеристик разработанной программной версии логарифмической арифметики с программной версией арифметики с фиксированной точкой при условии равного или близкого динамического диапазона чисел. Один из наиболее характерных результатов сравнения представлен в табл. 4. При составлении этой таблицы использованы данные из [7, 8]. Из анализа этой таблицы следует, что при удовлетворении требований на погрешности вычислений логарифмическая арифметика обладает преимуществом в тех алгоритмах, где число аддитивных операций (сложения и вычи-

тания) не более чем в 20 раз превышает число мультипликативных операций (умножения и деления). Это преимущество будет весьма значительным (в 5—6 раз) в тех алгоритмах, где содержится примерно равное число аддитивных и мультипликативных операций. Такое свойство характерно для современных алгоритмов управления и обработки информации, в которых широко используются процедуры матричной и линейной алгебры. Следует к тому же учесть, что в связи с использованием стандартных разрядных сеток (8 и 16 бит) динамический диапазон чисел логарифмической арифметики оказывается завышенным. При использовании нестандартных разрядных сеток может быть достигнуто еще большее преимущество в быстродействии.

Корректирующая таблица, используемая при аддитивных операциях, требует объема памяти 256 байт. Постоянное хранение такой таблицы в памяти не проблема.

3. Согласование логарифмической числовой системы с традиционными числовыми системами. Применение программных моделей логарифмической арифметики в информационно-измерительных системах или системах управления на базе существующих микропроцессоров требует решения вопросов ее согласования с числовой системой фиксированной точки. Переход от одной числовой системы к другой в этом случае должен иметь простую реализацию, позволяющую сохранить преимущества логарифмической арифметики. В статье рассмотрено программное решение вопроса быстрого взаимного перехода от одной числовой системы к другой.

Вопрос согласования логарифмической числовой системы с системой фиксированной точки рассматривался в [4, 9, 10]. В этих работах преобразование целого двоичного числа

$$N=\sum_{i=0}^{m} Z_i 2^i$$

(m — старший разряд числовой системы с фиксированной точкой; Z_i принимает значение 0 или 1 соответственно двоичному коду числа N) в логарифмический формат осуществляется на основе представления N в виде

$$N=2^{k}\left(1+\sum_{i=0,\, i\neq k}^{m} Z_i 2^{i-k}\right),$$

где k — старший значащий разряд числа N. В этом случае двоичный логарифм

$$\log_2 N=k+\log_2(1+\varepsilon) \qquad (3.1)$$

при

$$\varepsilon=\sum_{i=0,\, i\neq k}^{m} Z_i 2^{i-k}.$$

находится по его целой части K и дробной части $\log_2(1+\varepsilon)$ (такое соответствие следует из того, что $0\leqslant\varepsilon<1$). Основная трудность в реализации (3.1) состоит в определении $\log_2(1+\varepsilon)$. Авторы работ [4, 9] используют линейную аппроксимацию $\log_2(1+\varepsilon)=a\varepsilon+b$, требующую операций умножения, деления, сложения, что в свою очередь существенно снижает быстродействие преобразования. В работе [10] преобразование двоичного числа в логарифм осуществляется аппаратно.

В данной работе рассматривается **табличный способ определения** $\log_2(1+\varepsilon)$, легко реализуемый как для 8-разрядного логарифмического формата, так и для 16-разрядного. В памяти составляется таблица $F(\varepsilon)=\log_2(1+\varepsilon)$, обращение к которой осуществляется по адресу, соответствующему коду ε.

Таблица 5

Преобразование		
параметр	прямое	обратное
Минимальное время, такт	63	167
Миксимальное время, такт	469	481
Среднее время, такт	263	293
Объем памяти таблицы, байт	256	8

Обратное преобразование логарифмического формата в формат с фиксированной точкой также основано на табличном вычислении функции $1+\varepsilon$ по известному ее логарифму. В этом случае $\log_2(1+\varepsilon)$ представляет дробную часть логарифмического формата числа, а двоичный код такой дробной части рассматривается как адрес элемента таблицы соответствующего антилогарифма.

Основные характеристики преобразования 16-разрядного числа с фиксированной точкой в 8-разрядное число в логарифмическом формате и наоборот представлены в табл. 5.

Рассматриваемая логарифмическая числовая система применима на микропроцессоре Intel 8080 (КР580ВМ80А) при малом числе согласований формата с фиксированной точкой и логарифмического формата по сравнению с числом арифметических операций умножения и деления. В сложных цифровых измерительных системах и системах управления на основе логарифмической арифметики алгоритмы фильтрации и управления реализуются линейной комбинацией сигналов и требуют ~50% времени непосредственно на арифметические операции, ~45% на организацию этих операций в соответствии с алгоритмом и ~5% на согласование числовой системы фиксированной точки и логарифмической числовой системы. В таких системах оправдано рассмотренное программное согласование числовых систем.

4. Анализ программной реализации линейного алгоритма фильтрации и управления в логарифмической числовой системе. Рассмотрим линейную стационарную систему, описываемую разностным уравнением состояния:

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)+v(k). \qquad (4.1)$$

Измеряемые датчиками первичной информации переменные описываются уравнением

$$y(k)=Cx(k)+N(k). \qquad (4.2)$$

Здесь $x(k)$—n-мерный вектор состояния объекта управления; $u(k)$—s-мерный вектор управления; $y(k)$—m-мерный вектор измерений; $v(k)$, $N(k)$ — векторы белых гауссовых шумов; A, B, C — постоянные матрицы соответствующих размеров.

Алгоритм управления объектом (4.1) имеет вид

$$u(k+1)=Lz(k+1), \qquad (4.3)$$

где $z(k)$ — оценка вектора состояния, формируемая стационарным фильтром Калмана:

$$z(k+1)=Fz(k)+Gu(k)+Hy(k), \qquad (4.4)$$

F, G, H, L — постоянные матрицы размером $n\times n$, $n\times s$, $n\times m$, $s\times n$.

Последовательность матричных операций при вычислениях (4.3), (4.4) следующая: $E=Fz$; $E=E+Gu$; $E=E+Hy$; $u=LE$. Здесь используются две базовые матричные процедуры ($E=A^0b$, $E=E+A^0b$, где b, E — векторы, A^0 — прямоугольная матрица). Эти матричные процедуры реализованы программно для микропроцессора Intel 8080 (КР580ИК80А). Ана-

лиз составленных программ с учетом данных табл. 4 показывает, что среднее время выполнения процедур в машинных тактах определяется соотношениями:

— для $E=A^0b$

$$T_{1C}=[256+314(l-1)]p+10; \qquad (4.5)$$

— для $E=E+A^0b$

$$T_{2C}=[367+314(l-1)]p+10, \qquad (4.6)$$

где l — размерность вектора b; p — число строк матрицы A^0.

Программная реализация соотношения (4.4) с использованием матричных процедур, процедуры ввода измерений и преобразования в логарифмический формат с учетом (4.5), (4.6) и табл. 4 и 5 дает среднее время вычисления вектора оценки z в тактах:

$$T_{zC}=441+n[314(n+s-m)+48]. \qquad (4.7)$$

Вычисление вектора управления (4.3), его преобразование в формат с фиксированной точкой и вывод потребителям имеет следующее максимальное и среднее время в тактах:

$$T_{um}=746+n[350(n+2s+m)+25]+492s+563m, \qquad (4.8)$$

$$T_{uC}=746+n[314(n+2s+m)+48]+334s+357m. \qquad (4.9)$$

С учетом того, что в матрицах F, G, H, L, как правило, ряд элементов нулевые и переменные u, y, z имеют достаточно широкое изменение в допустимом динамическом диапазоне, на практике имеет место среднее время формирования вектора управления, определяемое соотношением (4.9).

По формуле (4.9) подсчитано среднее время формирования вектора управления в достаточно сложной системе автоматического управления (при $n=10$, $m=4$, $s=3$). Оно составляет 0.026 с (максимальное время по формуле (4.8) равно 0.0302 с). В отличие от логарифмической числовой системы, традиционная система с фиксированной точкой дает среднее время формирования вектора управления в рассматриваемом примере на уровне 0.12 с, т. е. примерно в 5 раз больше. Учитывая также более широкий динамический диапазон чисел знаковой логарифмической числовой системы по сравнению с 16-разрядной знаковой числовой системой с фиксированной точкой, можно рекомендовать разработанную авторами логарифмическую числовую систему для использования в быстродействующих системах автоматического управления и обработки информации, в которых не требуется высокая точность вычислений. Суммарный объем памяти для хранения корректирующей таблицы и таблиц преобразований составляет 520 байт.

Заключение. Исследованию логарифмической числовой системы в последние годы уделялось пристальное внимание; об этом свидетельствуют многочисленные публикации зарубежных и отечественных авторов. К достоинствам логарифмической числовой системы следует отнести широкий динамический диапазон чисел, позволяющий избежать операций масштабирования операндов при решении задач управления и приемлемую точность для алгоритмов обработки информации и управления. При этом реализация цифровых алгоритмов управления и обработки информации возможна на простых 8-разрядных микропроцессорах типа Intel 8080.

Рассмотренная здесь программная реализация логарифмической арифметики использует основание логарифма $\mathscr{D}=2$. Выбор такого основания был связан исключительно с удобствами программирования, в то время как для достижения численной устойчивости алгоритма, требуемой точности вычислений и динамического диапазона чисел может потребоваться другая величина $\mathscr{D}$. Один из возможных подходов к обоснованному выбору основания $\mathscr{D}$ логарифмической числовой системы предложен в [11].

Применение логарифмической системы в сложных цифровых алгоритмах дает преимущества по быстродействию относительно традиционных числовых систем. Выигрыш в быстродействии достаточно сложного алгоритма управления на основе логарифмической числовой системы относительно числовой системы с фиксированной точкой по исследованиям, приведенным в данной статье, почти пятикратный. Постоянное хранение в памяти корректирующей таблицы для аддитивных операций и таблиц преобразований форматов не создает дополнительных трудностей, т. к. требуемый объем памяти невелик (520 байт).

Согласование логарифмической числовой системы и числовой системы с фиксированной точкой программным путем дает возможность не изменять традиционную аппаратную часть систем управления (аналого-цифровые и цифро-аналоговые преобразователи). Обработка информации и формирование вектора управления в этом случае выполняется в логарифмической числовой системе, а ввод измеряемых сигналов и вывод управляющих воздействий осуществляется в формате с фиксированной точкой.

Рассмотренная 8-разрядная логарифмическая числовая система обладает невысокой точностью. Для повышения точности необходимо увеличивать число разрядов. При этом сохраняются преимущества по сравнению с эквивалентными по динамическому диапазону числовыми системами с фиксированной и плавающей точками. Определенные трудности возникают из-за возрастания объема памяти для хранения таблиц, однако можно предложить эффективные способы ее сокращения, которые здесь не рассматриваются из-за ограниченного объема.

Развитие логарифмической числовой системы для цифровых алгоритмов управления и обработки информации целесообразно в направлении аппаратной реализации спецпроцессоров с логарифмической арифметикой, дополняющих основной процессор с числовой системой фиксированной или плавающей точками. Применение логарифмических процессоров, даже созданных по традиционной промышленной технологии, позволит существенно увеличить быстродействие при сохранении характеристик точности и динамического диапазона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акушский И. Я., Юдицкий Д. И.* Машинная арифметика в остаточных классах. М.: Сов. радио, 1968.
2. *Edgar A. D., Lee S. C.* FOCUS microcomputer number system // Commun. ACM. 1979. V. 22. № 3.
3. *Taylor F. J., Gill R., Josef J., Radke J.* A 20-bit logarithmic number system processor // IEEE. Transact. Comput. 1989. V. 37. № 2.
4. *Hall E. L., Lynch D. D., Dwyer S. J.* Generation of products and quotients using approximate binary logarithms for digital filtering applications // IEEE. Transact. Comput. 1979. № 2.
5. *Taylor F. J.* A hydrid floating point logarithmic number processor // IEEE Transact. Circuits Systems. 1985. V. CAS-32. № 1.
6. *Kingsbury N. G., Rayner P. J.* Digital filtering using logarithmic arithmetic // Electron Letters. 1971. V. 7. № 2.
7. *Глазов А. Б., Костарев С. А., Суханова Е. В.* Эффективные программы умножения для микропроцессора КР580ИК80А // Микропроцессорные средства и системы. 1986. № 5.
8. *Погода А. В.* Пакет подпрограмм на ассемблере для арифметических вычислений // Микропроцессорные средства и системы. 1988. № 5.
9. *Kombet M., Van Zonneveld H., Verbeek L.* Computation of the base two logarithm of binary numbers // IEEE. Transact. Electron. Comput. 1965. V. EC-14. № 12.
10. *Примский В. Ф.* Цифровые логарифмирующие преобразователи // Приборы и системы управления. 1968. № 9.
11. *Пакшин П. В., Волков В. Л., Гущин О. Г.* Анариз и синтез алгоритмов управления с учетом характера вычислительной среды // Прикладные проблемы управления макросистемами. М.: ВНИИСИ, 1989.

Москва

Поступила в редакцию
13.VI.1990

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

ТЕХНИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА

УДК 519.21

Д. Ю. ЗАДОРОЖНЫЙ, А. Б. КУЗЬМИН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ставится задача диагностирования сложных технических систем (ТС), приводятся перечень взаимосвязанных формализованных этапов ее решения и основные показатели эффективности диагностирования ТС.

Представлен обзор существующих математических методов диагностирования ТС в соответствии с приведенной постановкой задачи.

Анализируются особенности применения математических методов и эффективность диагностирования ТС в классах тестового и функционального диагностирования.

Введение. При создании сложных технических систем (ТС) современные методы и средства вычислительной техники, постоянное развитие и совершенствование элементной базы позволяют путем математического и полунатурного моделирования отработать адекватную математическую модель функционирования реальной ТС, номинальные значения параметров которой обеспечивают заданные показатели качества ее функционирования.

Задача диагностирования является неотъемлемой частью создания ТС, так как ее решение направлено на выявление причин отклонений показателей качества от заданных значений, т. е. причин нарушения правильного функционирования ТС, потери ее работоспособности и исправности.

Наряду с использованием для целей диагностирования математической модели функционирования ТС широкое применение находят специальные диагностические модели, описывающие связи между техническим состоянием ТС и измеряемыми характеристиками системы. Диагностические модели получают в результате применения специальных методов аппроксимации математических моделей функционирования ТС. Например, построение диагностических аналитических моделей осуществляется методами малого параметра и функции чувствительности графоаналитические модели базируются на теории множеств и теории графов, функционально-логические модели применяют методы теории логики и логических функций, информационные модели используют методы теории вероятностей и математической статистики и т. д.

Основные принципы и способы разработки диагностических моделей ТС изложены в [1–9, 74].

Особенность применения специальных диагностических моделей состоит в том, что в процессе аппроксимации модели функционирования неизбежно возникает ошибка аппроксимации, которая является одним из основных источников методической ошибки результатов диагностирования [42].

Процедура выбора того или иного вида модели не формализуется и основана на физических процессах, происходящих в ТС под воздействием внешних и внутренних факторов. Поэтому при дальнейшем обсуждении математическая модель ТС (диагностическая, либо модель функционирования) рассматривается в качестве исходных данных методов решения задачи диагностирования.

Математическая модель ТС количественно определяет связи между входными воздействиями и реакциями на них и считается полностью известной, если известны: вид модели (алгебраические, дифференциальные, разностные уравнения различных типов, конечные автоматы и т. п.) и номинальные значения параметров модели, обеспечивающие заданную величину показателю качества функционирования ТС.

1. Общие требования к постановке задачи. В общем виде диагностическая модель и модель функционирования ТС для целей диагностирования на интервале времени ее эксплуатации $[t_0,\ t)$ представляется в виде

$$F:\{U\}\times\{N\}\times\{K\}\times[t_0,\ t)\to\{X\}\times[t_0,\ t), \qquad (1.1)$$

где: $\{U\}$ — множество значений вектора $U=(u_1,\ u_2,\dots,u_m)$ рабочих входных воздействий; $\{N\}$ — множество значений вектора $N=(n_1,\ n_2,\dots,n_l)$ мешающих возмущений и помех с известными статистическими характеристиками; $\{K\}$ — множество допустимых значений совокупности параметров $K=(k_1,\ k_2,\dots,k_r)$ с известным номинальным значением $K^{н}\in\{K\}$; $\{X\}$ — множество значений совокупности выходных реакций $X=(x_1,\ x_2,\dots,x_q)$; F — однозначное отображение элементов множеств $\{U\}$, $\{N\}$, $\{K\}$ в элементы множества $\{X\}$. Если отображение F неоднозначно, то одним и тем же значениям входных воздействий и параметров ТС будут соответствовать различные выходные реакции и решение задачи диагностирования таких ТС становится некорректным.

Показатель качества функционирования ТС, как правило, задается в виде векторного функционала $\Phi=(\varphi_1,\ \varphi_2,\dots,\varphi_\nu)$. Для каждой компоненты φ_i, $i=\overline{1,\ \nu}$, исходя из технических требований к ТС, определяются допустимые значения в виде замкнутых интервалов $[\varphi_i^1,\ \varphi_i^2]$, $i=\overline{1,\ \nu}$, позволяющих судить о целесообразности применения ТС по назначению. Если $\varphi_i\in[\varphi_i^1,\ \varphi_i^2]$, то система используется по назначению, если $\varphi_i\notin[\varphi_i^1,\ \varphi_i^2]$, то система неработоспособна и требует диагностирования и восстановления.

Координаты Φ являются независимыми и задаются двумя эквивалентными способами:

— на множествах $\{U\}$, $\{N\}$ и $\{K\}$ в виде

$$\Phi:\{U\}\times\{N\}\times\{K\}\times[t_0,\ t)\to R^\nu, \qquad (1.2)$$

где R^ν — пространство действительных чисел;

— на множествах $\{U\}$, $\{N\}$ и $\{X\}$

$$\Phi:\{U\}\times\{N\}\times\{X\}\times[t_0,\ t)\to R^\nu. \qquad (1.3)$$

Эквивалентность способов (1.2) и (1.3) обусловлена однозначным отображением F.

Независимо от заданных исходных данных, т. е. вида модели (1.1) и способов задания Φ (1.2) или (1.3), диагностирование ТС включает в себя формализованные решения следующих взаимосвязанных задач:

— определение пространства технических состояний ТС и вектора технического состояния в этом пространстве;

— разделение пространства технических состояний на множества, характеризующие виды технических состояний;

— выбор измеряемых характеристик ТС, позволяющих однозначно определить вид технического состояния;

— разработку математической модели перехода от одного вида технического состояния к другому;

— обоснование критерия принятия решения о виде технического состояния по результатам измерений, минимизирующего заданную функцию потерь и позволяющего оценить достоверность диагностирования;

— синтез оптимального алгоритма определения вида технического состояния (алгоритма поиска неисправностей);

— задание способа управления видом технического состояния с целью обеспечения работоспособности ТС (восстановления ТС).

Последняя задача не относится к диагностированию ТС, а относится к задаче управления по результатам диагностирования. Однако в большом количестве работ, среди которых выделим [10—17, 75—79], направленных на создание отказоустойчивых (живучих) ТС, задачи диагностирования и управления рассматриваются в неразрывной связи, так как имеют общую цель — сохранение работоспособности ТС. При этом методы диагностики оказывают существенное влияние на аппаратурные и алгоритмические затраты на обеспечение отказоустойчивости ТС, могут оказаться дорогостоящими и неэффективными при их практическом применении.

Для оценки эффективности решения перечисленных задач используются основные показатели [18—20, 80—83]:

— достоверность диагностирования, характеризующая вероятность правильного заключения о виде технического состояния по результатам измерений;

— глубина диагностирования, т. е. составная часть ТС, с точностью до которой определяется причина неработоспособного состояния ТС;

— средние интегральные затраты на практическую реализацию алгоритма диагностирования, включающие в себя: стоимость применяемой диагностической аппаратуры, продолжительность, трудоемкость диагностирования, контролепригодность, полнота и т. п.

В зависимости от способов использования и свойств входных воздействий методы диагностирования подразделяются на два больших класса:

— тестовые методы диагностирования (ТД);

— функциональные методы диагностирования (ФД).

На практике могут быть применены и смешанные методы диагностирования.

В последующих разделах обсуждаются особенности применения математических методов для диагностирования ТС в классах ТД и ФД в соответствии с приведенными выше задачами и показателями диагностирования.

2. Тестовые методы диагностирования технических систем. Тестовое диагностирование производится в специально организованном режиме функционирования ТС на интервале времени диагностирования $[t_д^1, t_д^2] \subset [t_0, t)$. В этом режиме на входы ТС поступают искусственно созданные входные воздействия U_T (тестовые воздействия), которые могут быть детерминированными и случайными (величинами или процессами), но с известными статистическими характеристиками. Размерность вектора (вектор — функции) U_T обусловлена целью диагностирования и структурой ТС и может существенно отличаться от размерности вектора рабочих входных воздействий U.

При известных номинальных значениях параметров $K^н$ модели (1.1) использование U_T позволяет:

— исключить из (1.1) часть координат вектора мешающих возмущений и помех N;

— по соотношению (1.2) определить номинальные U_T^* и $\Phi^* \in [\Phi_1, \Phi_2]$, например, методами оптимизации многокритериальных задач [21—22];

— при U_T^*, $K_н$ и однозначном отображении F в (1.1) найти эталонные

выходные реакции $X^э$, доставляющие показателю Ф в (1.3) такое же номинальное значение $Ф^* \in [Ф_1, Ф_2]$.

Так как на множествах $\{Ф\}$, $\{K\}$ и $\{X\}$ существуют элементы $Ф^*$, $K^н$, $X^н$, обеспечивающие номинальный режим функционирования ТС, то относительно этих элементов задачи ТД решаются на каждом из этих множеств. Рассмотрим особенности диагностирования на каждом из множеств $\{Ф\}$, $\{K\}$ и $\{X\}$.

Элементами множества $\{Ф\}$ по определениям (1.2) и (1.3) являются любые совокупности действительных чисел, удовлетворяющие аксиомам и операциям линейного нормированного пространства $L_Ф$ [23—25], которое определяется в качестве пространства технических состояний ТС.

Пространство $L_Ф$ над полем действительных чисел имеет базис и конечную размерность, что позволяет известными методами определить вектор технического состояния в $L_Ф$ как

$$Ф=\varphi_1 l_1+\varphi_2 l_2+\ldots+\varphi_\nu l_\nu, \tag{2.1}$$

где l_i — базис, а ν — размерность $L_Ф$. Значения вектора Ф определяют технические состояния ТС, число которых равно бесконечности.

При заданных допустимых значениях на $\varphi_i \in [\varphi_i^1, \varphi_i^2]$, $i=\overline{1, \nu}$ корректное разделение $L_Ф$ на конечное число множеств, характеризующих виды технических состояний, не вызывает затруднений. Вид технического состояния, соответствующий правильному функционированию ТС, представляет собой множество $Q_Ф^0$, удовлетворяющее ограничениям

$$Q_Ф^0=\{\varphi_i,\ i=\overline{1, \nu} \mid \varphi_i \in [\varphi_i^1, \varphi_i^2],\ i=\overline{1, \nu}\}. \tag{2.2}$$

Множества $Q_Ф^j$, $j=\overline{1, S}$, соответствующие неработоспособным видам технических состояний, выделяются как сочетания пересечений множеств типа $\varphi_i \in [\varphi_i^1, \varphi_i^2]$, $\varphi_j \notin [\varphi_j^1, \varphi_j^2]$, $i \neq j$; $j=\overline{1, \nu}$. Полное число таких сочетаний S равно

$$S=\sum_{R=0}^{\nu} \frac{\nu!}{R!(\nu-R)!} \tag{2.3}$$

и быстро возрастает даже при незначительном увеличении размерности ν вектора Ф.

На рис. 1 для $\nu=2$ изображены четыре вида технических состояний: $Q_Ф^0$ в соответствии с (2.2); вид состояния

$$Q_Ф^1=\{\varphi_1, \varphi_2 \mid \varphi_1 \in [\varphi_1^1, \varphi_1^2],\ \varphi_2 \notin [\varphi_2^1, \varphi_2^2]\} \tag{2.4}$$

по причине выхода за допуск φ_2; $Q_Ф^2$, аналогичный (2.4) при выходе за допуск φ_1; $Q_Ф^3$ при выходе за допуск φ_1 и φ_2 одновременно.

Разработка математической модели, позволяющей количественно описать переход из одного вида технического состояния в другое, т. е. из $Q_Ф^i$ в $Q_Ф^j$ основывается на априорных сведениях о физической природе причин изменения вектора Ф по величине и направлению. Адекватность модели реальному процессу перехода из $Q_Ф^i$ в $Q_Ф^j$, $i, j=\overline{0, S}$ проверяется и уточняется в течение времени эксплуатации ТС $t \in [t_0, t)$. Так как процесс эксплуатации ТС представляет собой использование системы по назначению во времени, то переход из $Q_Ф^i$ в $Q_Ф^j$, $i, j=\overline{0, S}$ происходит с течением времени. Поэтому в формализованном виде переход из $Q_Ф^i$ в $Q_Ф^j$, $i, j=\overline{0, S}$ описывается случайными процессами (при детерминированном описании перехода задача диагностирования не имеет смысла).

При использовании случайных процессов модель перехода представляется в виде разрывного, либо непрерывного процессов [26—33].

Применение разрывного случайного процесса обосновано разделением пространства L_Φ на конечное число видов состояний $Q_\Phi{}^j$, $j=\overline{0, S}$ и случайным моментом времени перехода из $Q_\Phi{}^i$ в $Q_\Phi{}^j$, $i, j=\overline{0, S}$.

Особенность L_Φ состоит в том, что компоненты вектора состояния φ_i, $i=\overline{1, \nu}$ вместе с допусками на них $[\varphi_i{}^1, \varphi_i{}^2]$ независимы, поэтому общую модель перехода представляют совокупностью независимых моделей, каждая из которых имеет два вида состояния.

$$Q^0_{\varphi_i}=\{\varphi_i\,|\,\varphi_i\in[\varphi_i{}^1,\varphi_i{}^2]\};\quad Q^1_{\varphi_i}=\{\varphi_i\,|\,\varphi_i\notin[\varphi_i{}^1,\varphi_i{}^2],\quad i=\overline{1,\nu}\},\tag{2.5}$$

причем $Q^1_{\varphi_i}$, $i=\overline{1, \nu}$ в зависимости от характера неисправностей могут быть поглощающими либо непоглощающими (самоустраняющиеся неисправности).

В общем случае для каждой независимой модели могут задаваться самостоятельные управляющие потоки, которые определяют статистические характеристики моментов времени перехода из $Q^0_{\varphi_i}$ в $Q^1_{\varphi_i}$ и наоборот. Значения характеристик управляющих потоков обусловлены адекватностью модели реальному процессу перехода ТС, и они уточняются и корректируются в течение эксплуатации ТС.

Адекватная математическая модель перехода при известном начальном виде технического состояния в момент t_0, как правило $Q_\Phi{}^0$, позволяет априорно, не производя измерений характеристик ТС, определить вероятности видов $Q_\Phi{}^j$, $j=\overline{0, S}$, т. е. вероятности

$$P_j(\Phi\in Q_\Phi{}^j,t\},\quad \sum_{j=0}^{S}P_j\{\Phi\in Q_\Phi{}^j,t\}=1\tag{2.6}$$

в любой момент времени $t\in[t_0, t)$. Например, пусть для $Q_\Phi{}^j$, $j=\overline{0,4}$, изображенных на рис. 1, используются две модели разрывного случайного процесса, позволяющих независимо определить в любой момент времени t вероятности:

$$P_1{}^1=P\{\varphi_1\in[\varphi_1{}^1,\varphi_1{}^2],t\};\ P_1{}^2=P\{\varphi_1\notin[\varphi_1{}^1,\varphi_1{}^2],t\};$$

$$P_2{}^1=P\{\varphi_2\in[\varphi_2{}^1,\varphi_2{}^2],t\};\ P_2{}^2=P\{\varphi_2\notin[\varphi_2{}^1,\varphi_2{}^2],t\},$$

причем, $P_1{}^1+P_1{}^2=1$; $P_2{}^1+P_2{}^2=1$.

Тогда вероятности (2.6), сумма которых равна единице, в тот же момент времени примут вид:

$$P_0=P_1{}^1\cdot P_2{}^1;\ P_1=P_2{}^1\cdot P_1{}^2;\ P_2=P_1{}^1\cdot P_2{}^2;\ P_3=P_2{}^1\cdot P_2{}^2.$$

Особенность применения непрерывного случайного процесса любого вида (гауссовского, марковского, условного марковского, мартингала и т. п.) состоит в том, что он описывает переход не из $Q_\Phi{}^i$ в $Q_\Phi{}^j$, а переход вектора технического состояния Φ из одного состояния в другое, т. е. от одного элемента $\{\Phi\}$ к другому, число которых в $\{\Phi\}$ — континуум.

Свойство независимости φ_i, $i=\overline{1, \nu}$ также позволяет применить ν независимых моделей перехода, каждая из которых может использовать различные виды случайных процессов. По этим моделям и при известных начальных распределениях $W_i(\varphi_i, t_0)$ определяется распределение $W_i(\varphi_i, t)$ в любой момент времени $t\in[t_0, t)$. Распределение вектора состояния Φ в момент $t\in[t_0, t)$ принимает вид

$$W(\Phi,t)=\prod_{i=1}^{\nu}W_i(\varphi_i,t).\tag{2.7}$$

Вероятности видов Q_{Φ}^j, $j=\overline{0, S}$ в момент $t \in [t_0, t)$ вычисляются как

$$P_j\{\Phi \in Q_{\Phi}^j, t\} = \int_{Q_{\Phi}^j} W(\Phi, t)\, d\Phi. \qquad (2.8)$$

Для задачи диагностирования модель перехода на основе непрерывного случайного процесса является более общей по отношению к разрывному процессу. Однако, при одинаковой степени адекватности моделей непрерывного и разрывного процессов реальному переходу ТС из Q_{Φ}^j в Q_{Φ}^i, i, $j=\overline{0, S}$ вероятности (2.6) и (2.8) несущественно отличаются друг от друга.

Распределение $W(\Phi, t)$ и вероятности $P_j\{\Phi \in Q_{\Phi}^j, t\}$, $j=\overline{0, S}$ служат исходными данными для решения двух задач:

— оценки достоверности результатов диагностирования;

— синтеза оптимального алгоритма поиска неисправностей, минимизирующего средние интегральные затраты на реализацию этого алгоритма.

Основным требованием к выбору измеряемых характеристик ТС является обеспечение заданной глубины диагностирования. Глубина диагностирования обусловлена размерностью вектора состояния и будет обеспечена, если результаты измерений однозначно определяют значение всех координат вектора технического состояния.

В пространстве L_{Φ} не возникает математической задачи выбора измеряемых характеристик ТС, так как для однозначного определения координат Φ необходимо измерять все его координаты φ_i, $i=\overline{1, \nu}$.

Под измерением согласно [39] понимается нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств на интервале времени $[t_и^1, t_и^2] \subset [t_д^1, t_д^2]$. Специальные технические средства могут производить измерения физической величины $y(t)$, $t \in [t_и^1, t_и^2]$ различными способами: если аналитическое выражение $y(t)$ известно, то измеряются неизвестные параметры $y(t)$; если выражение $y(t)$ неизвестно, то измерениями могут быть ординаты $y(t)$ в фиксированные моменты времени $t \in [t_и^1, t_и^2]$, время пребывания на заданном уровне или заданной области значений $y_1, y_2, \ldots$, число пересечений заданного уровня y_i; наибольшее и наименьшее значения $y(t)$ при $t \in [t_и^1, t_и^2]$, среднее значение на $[t_и^1, t_и^2]$ и т. п.

Измерения могут быть прямыми или косвенными, но независимо от вида измерений они всегда сопровождаются ошибками измерений, обусловленными видом $y(t)$, алгоритмами и источниками внутренних помех (с известными статистическими характеристиками) средств измерений.

В результате измерения Φ получают измеренное значение $\hat{\Phi}$ на интервале измерения $[t_и^1, t_и^2]$ и решают задачу определения допустимых областей $\hat{Q}_{\Phi}^j$, $j=\overline{0, S}$ на множестве измерений $\{\hat{\Phi}\}$, которые соответствуют видам технических состояний Q_{Φ}^j, $j=\overline{0, S}$. Области $\hat{Q}_{\Phi}^j$, $j=\overline{0, S}$ определяются так, чтобы заданная функция потерь при принятии решения о виде технического состояния по результатам измерений $\hat{\Phi}$ принимала минимальное значение.

В общем случае, когда Φ — вектор, эта задача классифицируется как задача проверки многих статистических гипотез, число которых равно S. В зависимости от структуры функции потерь определяется критерий (решающее правило), минимизирующий функцию потерь при принятии решения о виде технического состояния по результатам измерений.

В большинстве практических приложений в качестве функции потерь используется суммарная вероятность ошибочного решения P_0. В этом случае решение о виде технического состояния по результатам измерений $\hat{\Phi}$ принимается согласно байесовскому решающему правилу, минимизирующему величину ошибки P_0 и позволяющему оценить достовер-

ность диагностирования $Д$ в виде [4, 19, 20]

$$Д=1-P_0, \quad (2.9)$$

где $P_0=P_л+P_н$ — суммарная вероятность ложного и необнаруженного видов технических состояний.

При числе видов технических состояний $S>1$ применение других решающих правил (Неймана-Пирсона, минимаксного, знакового, Вальда и т. п.) затруднено из-за сложности разделения функции потерь на составляющие типа вероятностей ложного и необнаруженного видов технических состояний [36—38, 80, 81].

Достоверность $Д$ включает в себя две составляющие: методическую $Д_м$ и инструментальную $Д_и$ достоверности. В ряде работ по технической диагностике [40, 41] $Д_м$ и $Д_и$ считаются независимыми, причем, $Д_м$ определена только для контроля технического состояния как функция полноты контроля, а $Д_и$ вычисляется по различным формулам без использования критерия принятия решения. Поэтому кратко рассмотрим вычисление $Д_м$ и $Д_и$ согласно [42, 43] в $L_Ф$, а в других пространствах отметим только особенности вычисления этих показателей.

В пространстве $L_Ф$ для вычисления $Д_м$ и $Д_и$ исходными данными являются:

— распределение $W(t, Ф)$, виды технических состояний $Q_Ф{}^j$, $j=\overline{0, S}$ и априорные вероятности $P(Q_Ф{}^j \ni Ф, t)$;

— математическая модель измерения Ф в виде известной функции

$$\hat{Ф}=H(Ф, \Delta Ф, t), \; t\in[t_u{}^1, t_u{}^2], \quad (2.10)$$

где: $\Delta Ф$ — ошибка измерения с заданной стационарной плотностью распределения $W_{\Delta Ф}(\Delta Ф)$. Вид функции $H(\cdot)$ и плотность $W_{\Delta Ф}(\Delta Ф)$ обусловлены применяемым техническим средством измерения Ф;

— байесовский критерий принятия решения, когда принимается решение $Ф\in Q_Ф{}^j$, если

$$P_j(Ф\in Q_Ф{}^j, t)\cdot W(\hat{Ф}, t|Ф\in Q_Ф{}^j)>P_i(Ф\in Q_Ф{}^i, t)\cdot W(\hat{Ф}, t|Ф\in Q_Ф{}^i) \quad (2.11)$$

для всех $i\neq j$, $i, j=\overline{0, S}$.

При оценке $Д_м$ считается, что ошибки измерений отсутствуют, т. е. в (2.10) $\hat{Ф}=Ф_u$ и (2.11) примет вид

$$P_j(Ф\in Q_Ф{}^j, t)\cdot W(Ф, t|Ф\in Q_Ф{}^j)>P_i(Ф\in Q_Ф{}^i, t)\cdot W(Ф, t|Ф\in Q_Ф{}^i) \quad (2.12)$$

Условные плотности $W(Ф, t/Ф\in Q_Ф{}^j)$, $j=\overline{0, S}$ вычисляются как

$$W(Ф, t\,|\,Ф\in Q_Ф{}^j)=\begin{cases} W(Ф, t)/P(Ф\in Q_Ф^j, t) & Ф\in Q_Ф{}^j, \; j=\overline{0, S}, \\ 0, \quad Ф\notin Q_Ф{}^j, & i=\overline{0, S}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Из (2.12) и (2.13) видно, что при $\hat{Ф}=Ф$ и замене знака неравенства в (2.12) на знак нестрогого неравенства для определения $\hat{Q}_Ф{}^j$ области $\hat{Q}_Ф{}^j=Q_Ф{}^j$, т. е. при абсолютно точном измерении Ф методическая ошибка отсутствует и методическая достоверность

$$Д_м=1-P_{0м}, \quad (2.14)$$

где $P_{0м}$ — суммарная вероятность методической ошибки, равна единице. Высокая методическая достоверность является одним из основных преимуществ диагностирования в $L_Ф$.

Для оценки инструментальной достоверности

$$Д_м=1-P_{0u}, \quad (2.15)$$

где P_{0u} — суммарная вероятность инструментальной ошибки, сначала вычисляются условные плотности $W(\hat{Ф}, t/Ф\in Q_Ф{}^j)$, $j=\overline{0, S}$, исходя из

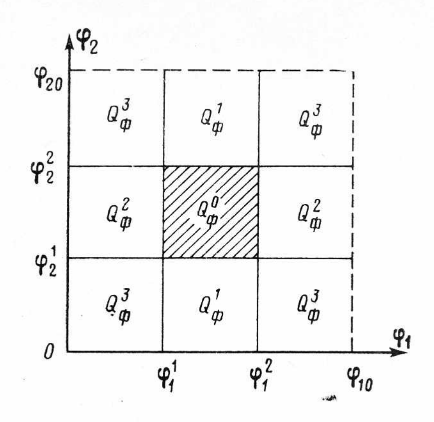


Рис. 1. Виды технического состояния ТС

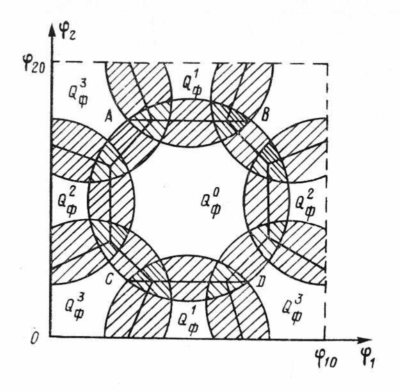


Рис. 2. Границы областей технического состояния ТС

(2.10) и (2.12) и известного распределения $W_{\Delta\Phi}(\Delta\Phi)$, как

$$W(\hat{\Phi}, t \mid \Phi \in Q_\Phi{}^j) = \int\limits_{Q_\Phi{}^j} W_{\Delta\Phi}\{H^{-1}(\hat{\Phi}, \Phi, t)\} \left| \frac{\partial H(\cdot)}{\partial \hat{\Phi}} \right| \cdot W(\Phi, t/\Phi \in Q_\Phi{}^j)\, d\Phi, \tag{2.16}$$

где $H^{-1}(\cdot)$ — обратное преобразование (2.10) относительно $\Delta\Phi$.

Затем определяются $\hat{Q}_\Phi{}^j$ на множестве $\{\hat{\Phi}\}$ путем замены знака неравенства в (2.11) на знак нестрогого неравенства, вычисляются P_{0u} и $Д_u$.

Вычисление P_{0u} является нетривиальной задачей. На рис. 2 для видов технических состояний рис. 1 качественно представлены: сечения ограниченных распределений (2.16); границы областей $\hat{Q}_\Phi{}^j$, $j=\overline{0,3}$; площади заштрихованных областей пропорциональны вероятности P_{0u}, причем, для вычисления P_{0u} следует исключать при интегрировании часть перекрывающихся участков этих областей, которые отмечены частой штриховкой.

Сложность точного вычисления P_{0u} заставила перейти к оценке верхней границы вероятности ошибки $\hat{P}_{0u}$, которая согласно [34] имеет вид

$$\hat{p}_{0u} = \sum_{i>j}^{S} \sum_{j=0}^{S} P_{uij}, \tag{2.17}$$

где P_{uij} — вероятность суммарной ошибки при диагностировании i-того и j-того видов технических состояний.

На рис. 3а для скалярного показателя качества $\Phi=\varphi$ приведены: плотность $W(\varphi, t)$; условные плотности для двух видов технических состояний (2.13) $Q_\Phi{}^0=\{\varphi|\varphi\in[\varphi^1, \varphi^2]\}$, $Q_\Phi{}^1=\{\varphi|\varphi\notin[\varphi^1, \varphi^2]\}$; распределение ошибок измерений $\psi(\Delta\varphi)$. На рис. 3б на качественном уровне — условные плотности для решающего правила (2.11), допустимые области принятия решения $\hat{Q}_\Phi{}^0$, $\hat{Q}_\Phi{}^1$ и суммарная ошибка принятия решения P_{0u}, равная заштрихованной площади соответствующих распределений. Для вычисления ошибки P_{uij} на рис. 2, например, при принятии решений о $Q_\Phi{}^0$ и $Q_\Phi{}^1$ виде состояний интегрирование соответствующих распределений производится по отмеченной площади пересечения этих распределений с границами АВ и СД.

Таким образом, при диагностировании в L_Φ $Д_м$ и $Д_u$ независимы, $Д_м=1$ и общая $Д$, равная

$$Д=Д_м \cdot Д_u, \tag{2.18}$$

обусловлена только $Д_u$, причем известно, что с увеличением размерности Φ (глубины диагностирования) $Д_u$ уменьшается [42].

Если относительно координат Ф не вводится никаких дополнительных ограничений, то исходными данными для синтеза оптимального алгоритма поиска вида технического состояния являются:

— вероятности $P_j(\Phi \in Q_\Phi^j)$, $j=\overline{0, S}$;

— средние интегральные затраты на измерение каждой координаты φ_i, $i=\overline{1, \nu}$;

— инструментальная достоверность измерения φ_i, $i=\overline{1, \nu}$.

Критерием оптимальности, как правило, являются суммарные интегральные затраты на процедуру поиска неисправностей при заданных ограничениях на достоверность и глубину диагностирования. Результатом решения этой задачи являются комбинационные методы поиска неисправностей по жесткой и гибкой программе типа «время-вероятность», информационные методы и т. п. [1, 44, 45].

При реализации алгоритма поиска неисправностей определяются вид технического состояния и координаты $\varphi_i \notin [\varphi_i^1, \varphi_i^2]$ и возникает задача управления видом технического состояния для обеспечения работоспособного состояния ТС.

Значения φ_i, $i=\overline{1, \nu}$, являющиеся функционалами вида (1.2) или (1.3), изменяются с помощью K, так как X обусловлены U_T и K. Для корректного решения задачи управления обеспечивается взаимно однозначное отображение элементов L_Φ и множества K. Отображение будет взаимно однозначным, если размерности L_Φ и $\{K\}$ совпадают, и определитель матрицы

$$|\partial\varphi_i(\cdot)/\partial k_j| \neq 0, \; i, j=\overline{1, \nu} \qquad (2.19)$$

для любых значений $K \in \{K\}$ [23, 25].

Из анализа особенностей решения задачи диагностирования в L_Φ методами ТД следует:

— корректность постановки и решения перечисленных в п. 1 задач;

— принципиальная возможность решения задачи диагностирования без использования математической диагностической модели и модели функционирования ТС;

— высокая методическая достоверность результатов диагностирования.

Основными недостатками ТД в L_Φ являются:

— значительные средние затраты на создание искусственно созданных входных воздействий и реализацию процедуры измерений φ_i, $i=\overline{1, \nu}$. Например, для отдельного показателя качества — как максимальная дальность обнаружения радиолокатора — потребуется несколько объектов для обнаружения, расположенных вблизи максимальной дальности и автономный измеритель дальности до них, точность измерения которого должна быть не хуже точности радиолокатора;

— сложность решения задачи управления в L_Φ заставляет переходить к управлению на множестве $\{K\}$, которое должно быть связано с L_Φ взаимно однозначным отображением.

Элементами множества $\{K\}$ являются любые совокупности действительных чисел, для которых также справедливы операции и аксиомы линейного нормированного пространства, что позволяет корректно определить пространство технических состояний L_K и вектор технического состояния в L_K, размерность которого $K=(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ характеризует заданную глубину диагностирования.

При известных отображении (1.2) в виде функции $\Phi(U_T, N, K)$ и Q_Φ^j, $j=\overline{0, S}$ разделение на виды технических состояний в L_K производится как

$$Q_K^j = \{K | \Phi(U_T, N, K) \in Q_\Phi^j, \; j=0, S\}. \qquad (2.20)$$

Следствием разделения на виды Q_K^j, $j=\overline{0, S}$ с помощью (2.20) является зависимость параметров k_i, $i=\overline{1, r}$ между собой.

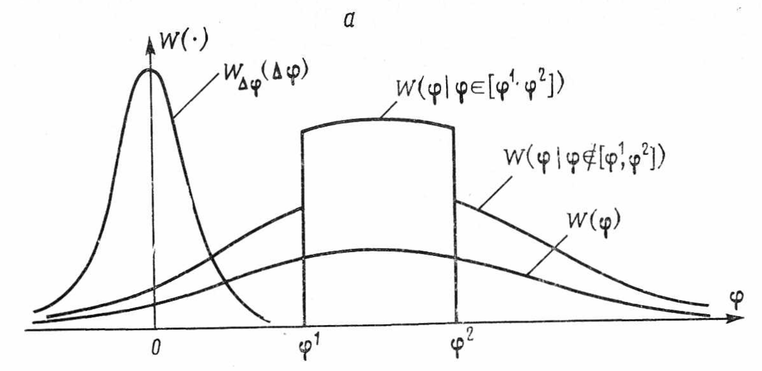


Рис. 3а. Условные и безусловные плотности при скалярном показателе качества

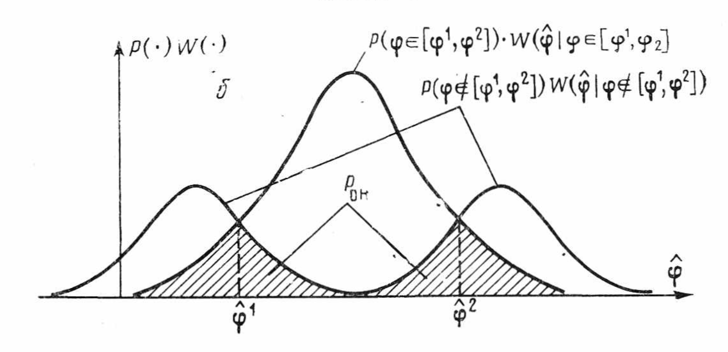


Рис. 3б. Условные плотности для байесовского решающего правила

На рис. 4 для скалярного показателя качества φ

$$\varphi(U_T, N, k_1, k_2) = [(k_1-a)^2+(k_2-a)^2]\cdot U_T$$

и $Q_\Phi{}^0=\{\varphi|\varphi\in[0,\ b]\}$, $Q_\Phi{}^1=\{\varphi|\varphi\notin[0,\ b]\}$ при a, b=const, $U_T=1$, $N=0$ в пространстве $L_K=\{k_1,\ k_2|k_1\in[0,\ k_{10}],\ k_2\in[0,\ k_{20}]\}$ показаны:

$$Q_K{}^0=\{K|(k_1-a)^2+(k_2-a)^2\in[0,\ b]\};$$

$$Q_K{}^1=\{K|(k_1-a)^2+(k_2-a)^2\notin[0,\ b]\}.$$

Зависимость k_i, $i=\overline{1,\ r}$ при разделении на $Q_K{}^j$, $j=\overline{0,\ S}$ играет решающую роль при оценке $Д_м$ и управлении видом технического состояния.

Разработка математической модели перехода из $Q_K{}^j$ в $Q_K{}^i$, i, $j=\overline{0,\ S}$ аналогична разработке модели в L_Φ, не имеет принципиальных особенностей и служит для тех же целей.

Для однозначного определения вектора K как и в L_Φ измеряются все координаты k_i, $i=\overline{1,\ r}$. На практике операции измерения k_i, $i=\overline{1,\ r}$ реализуются в зависимости от возможности прямых и косвенных их измерений в ТС.

Если все координаты k_i, $i=\overline{1,\ r}$ доступны прямым измерениям, то математической задачи выбора измеряемых характеристик ТС не возникает. Однако, для большинства типов ТС (радиоэлектронных, электрических, ряда механических и т. п.) измерения k_i, $i=\overline{1,\ r}$ осуществляются косвенным методом, т. е. при известных U_T и математической модели ТС измеряются выходные реакции X и по результатам их измерений определяются k_i, $i=\overline{1,\ r}$. В этом случае возникает задача выбора минимального числа измеряемых выходных реакций, которая решается различными способами [45, 46, 47]. Суть этих способов сводится к следующему. Используется уравнение (1.1) и выделяются в нем r выходных реакций x_j,

$j=\overline{1, r}$ (в соответствии с размерностью K). Одновременные измерения $\hat{x}_j$ на интервале времени $[t_u^1, t_u^2]$ однозначно определяют значение k_i, $i=\overline{1, r}$, т. е. в r уравнениях, выделенных в (1),

$$\begin{aligned} &f_1(U_T, N, K)=\hat{x}_1,\\ &f_2(U_T, N, K)=\hat{x}_2, \qquad\qquad (2.21)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &f_r(U_T, N, K)=\hat{x}_r. \end{aligned}$$

Якобиан $|\partial f_i(\cdot)/\partial k_j|$, $i, j=\overline{1, r}$ отличен от нуля при любых $K\in\{K\}$, заданных U_T, N и $[t_u^1, t_u^2]\subset[t_\partial^1, t_\partial^2]$ (r неизвестных, r независимых уравнений).

Число независимых уравнений, равное r, относительно r неизвестных k_i можно получить и при измерении одной выходной реакции ТС x_i, если произвести r измерений x_i на несовпадающих интервалах времени $[t_{ui}^1, t_{ui}^2]$, $i=\overline{1, r}$, входящих в интервал диагностирования $[t_\partial^1, t_\partial^2]$, и выделить систему уравнений в виде

$$\begin{aligned} &f_{i1}(U_T, N, K)=\hat{x}_{i1},\\ &f_{i2}(U_T, N, K)=\hat{x}_{i2}, \qquad\qquad (2.22)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &f_{ir}(U_T, N, K)=\hat{x}_{ir}. \end{aligned}$$

Тогда, если $|\partial f_{i\mu}/\partial K_j|\neq 0$, $\mu=\overline{1, r}$, $j=\overline{1, r}$ для любых $K\in\{K\}$, заданных U_T, N и $[t_{ui}^1, t_{ui}^2]\subset[t_\partial^1, t_\partial^2]$, то измерения $\hat{x}_{i\mu}$, $\mu=\overline{1, r}$ позволяют однозначно определить k_i, $i=\overline{1, \nu}$.

Задача минимизации заключается в определении минимальной совокупности выходных реакций (в предельном случае одной x_i), измерение которых обеспечивает однозначное определение k_i, $i=\overline{1, \nu}$.

В формализованном виде эта задача имеет строгое решение для аналоговых и дискретных стационарных и нестационарных линейных систем, математические модели функционирования которых описываются обыкновенными дифференциальными и разностными уравнениями типа [45]

$$\begin{aligned} &\dot{X}(t)=A(K, t)X(t)+B(K, t)U_T(t),\\ &X_{k+1}=A(Kt_k)X(t_k)+B(K, t_k)U_T(t_k) \end{aligned} \qquad (2.23)$$

и уравнениями с отклоняющимся аргументом [48, 49]

$$\begin{aligned} &\dot{X}(t)=\sum_{j=0}^{n}A_j(K, t)X(t-\tau_j)+B(K, t)U_T(t),\\ &X_{k+1}=\sum_{j=0}^{n}A_j(K, t_k)X_{k-j}+B(K, t_k)U_{Tk}. \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Минимизация выходных измеряемых реакций моделей (2.23), (2.24) осуществляется на основе модификаций критерия наблюдаемости (полной, относительной) Калмана стационарных и нестационарных линейных систем [50—53].

Критерий Калмана заимствован из теории идентификации и используется для оценки выходных реакций в фиксированный момент времени t по результатам измерений при известном векторе K, поэтому дополнительным требованием является справедливость критерия для любых значений $K\in\{K\}$.

Для нелинейных систем минимизация числа выходных реакций для измерения производится либо на основе различного рода линейных приближений, либо эмпирическими способами.

В цифровых системах минимизация выходных реакций связана с наличием элементов памяти. Элементы памяти позволяют в одной выходной реакции последовательно во времени получить информацию о техническом состоянии других элементов структуры системы. Поэтому в большинстве случаев задача минимизации выходных измеряемых реакций цифровой системы сводится к синтезу входных воздействий (тест-задач), позволяющих по выходной реакции (результатам решения тест-задач) определить техническое состояние элементов системы с заданной глубиной диагностирования [54—56].

Функция потерь, критерий принятия решения в $L_К$ при известных $W(K, t)$, $Q_К{}^j$, $j=\overline{0, S}$ имеют такую же структуру как и в $L_Ф$.

Если $Q_К{}^j$, $j=\overline{0, S}$ используется в виде (2.20), то $Д_м=1$, а $Д_и$ обусловлена моделью и ошибками измерений и вычисляется аналогично (2.15), (2.16), (2.17), в которых используются вероятности $P(K\in Q_{К,}{}^j{}_t)$ и условные плотности $W(\tilde{K}, t/K\in Q_К{}^j)$.

Задача синтеза оптимального алгоритма поиска вида технического состояния не имеет особенностей по сравнению с аналогичной задачей в $L_Ф$.

Задача управления видом технического состояния в $L_К$ имеет два пути решения. Первый путь связан с решением задачи оптимального управления [57—60]. Критерий оптимальности включает в себя «расстояние» между номинальной точкой $K^н\in Q_К{}^0$ и измеренным значением $\tilde{K}\in\tilde{Q}_К{}^j$ и средние интегральные трудозатраты на управление параметрами K. В результате ее решения получают оптимальную траекторию достижения окрестности точки $K^н$, минимизирующую заданный критерий. Решение этой задачи эффективно при сравнительно небольшой размерности K. При увеличении глубины диагностирования резко уменьшается инструментальная достоверность $Д_и$, так как для решения задачи оптимального управления необходимо измерять все координаты K.

С целью уменьшения интегральных затрат на реализацию алгоритма поиска вида технического состояния и управления этим состоянием чаще используют второй путь, который предполагает:

— аппроксимацию $Q_К{}^j$, $j=\overline{0, S}$ областями $Q_К{}^{*j}$, позволяющими определить независимые допуски на каждую координату k_i, $i=\overline{1, \nu}$ в виде $[k_i{}^1, k_i{}^2]$;

— вероятность одновременного выхода за допуски двух и более параметров k равной нулю.

Первое предположение упрощает алгоритм управления видом технического состояния, т. е. изменяются значения тех параметров k_i, которые вышли за свои допустимые значения $[k_i{}^1, k_i{}^2]$.

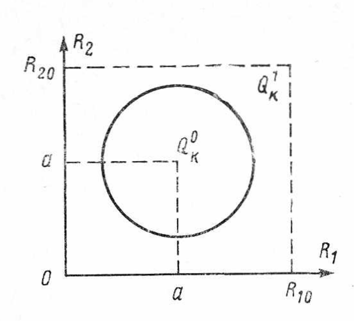
Второе предположение позволяет уменьшить интегральные затраты на алгоритм поиска неисправностей и повысить $Д_и$ за счет уменьшения числа видов технических состояний.

Существуют различные способы аппроксимации, т. е. определения допусков $[k_i{}^1, k_i{}^2]$ на координаты k_i, $i=\overline{1, \nu}$ [5], но в результате применения любого из них объективно существующие связи между k_i, $i=\overline{1, \nu}$, обусловленные видами $Q_К{}^j$, $j=\overline{0, S}$, разрываются и при дальнейшем решении задачи диагностирования не учитываются. Это приводит:

— к уменьшению $Д_м$;

— взаимной зависимости $Д_м$ и $Д_и$.

Уменьшение $Д_м$ происходит из-за наличия ошибок аппроксимации, т. е. когда существуют элементы $K\in Q_К{}^j$ и одновременно $K\notin \overset{*}{Q}_К{}^j$ и наоборот элементы $K\notin Q_К{}^j$, но $K\in \overset{*}{Q}_К{}^j$, $j=\overline{0, S}$. Суммарная методическая ошибка Pом



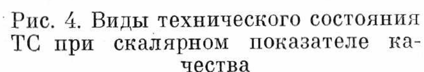


Рис. 4. Виды технического состояния ТС при скалярном показателе качества

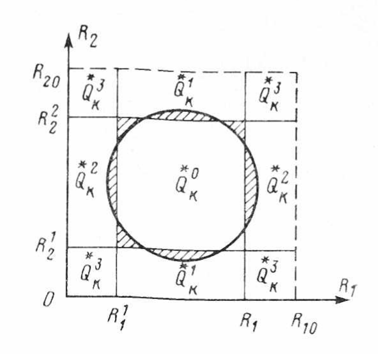


Рис. 5. Аппроксимация области работоспособности равновеликим квадратом

вычисляется согласно байесовскому критерию. Сначала находятся условные плотности вида

$$W(K, t \mid K \in Q_K{}^j) = \begin{cases} W(K, t)/P(K \in Q_K{}^j), & K \in Q_K{}^j \\ 0, \quad K \notin Q_K{}^j, & j = \overline{0, S}. \end{cases} \tag{2.25}$$

Затем определяется ошибка P_{0ij} между двумя видами состояний

$$P_{0ij} = \int\limits_{\substack{K \in Q_K{}^j \\ K \notin \overset{*}{Q}_K{}^j}} W(K, t \mid K \in Q_K{}^j)\, dK + \int\limits_{\substack{K \in \overset{*}{Q}_K{}^j \\ K \notin Q_K{}^j}} W(K, t \mid K \in Q_K{}^i)\, dK, \tag{2.26}$$

и оценивается верхняя граница ошибки

$$P_{\text{ом}} = \sum_{i>j}^{S} \sum_{j=0}^{S} P_{0ij}. \tag{2.27}$$

На рис. 5 для примера рис. 4 в $L_K = \{K_1, K_2 | K_1 \in [0, K_{10}], K_2 \in [0, K_{20}]\}$ представлен результат аппроксимации $Q_K{}^0$ равновеликим квадратом $\overset{*}{Q}_K{}^0$, позволяющий определить независимые допуски $[k_1{}^1, k_1{}^2]$ и $[k_2{}^1, k_2{}^2]$ и разделить L_K на четыре вида технических состояний. Площадь заштрихованных областей пропорциональна методической ошибке $P_{0\,м}$.

В пространстве L_K аппроксимированные множества $\overset{*}{Q}_K{}^j$, $j = \overline{0, S}$ служат исходными данными для оценки $Д_и$. Априорные вероятности $P\{K \in \overset{*}{Q}_K{}^j\}$ и условные плотности $W(\bar{K} | K \in \overset{*}{Q}_K{}^j)$ в байесовском критерии принятия решения будут зависеть от вида $\overset{*}{Q}_K{}^j$, $j = \overline{0, S}$, т. е. в зависимости от способа аппроксимации в L_K будут изменяться обе достоверности $Д_м$ и $Д_и$. В работе [42] исследована зависимость общей достоверности $Д$ как функции множеств $\overset{*}{Q}_K{}^j$, $j = 0, 1$ и размерности вектора K. Доказано, что при фиксированной размерности K существует максимальное значение $Д$. При неограниченном увеличении размерности K величина этого максимума стремится к нулю.

Таким образом, в L_K возможно сокращение средних интегральных затрат на реализацию процедуры диагностирования и управления видом технического состояния за счет уменьшения методической достоверности результатов диагностирования.

В ряде работ по технической диагностике [1, 2, 5, 6] в качестве пространства технических состояний используется множество выходных реакций $\{X\}$ как функций времени на интервале диагностирования $[t_д{}^1, t_д{}^2]$. Существование при ТД в $\{X\}$ элемента $X^э$, $t \in \{t_д{}^1, t_д{}^2\}$ позволяет, напри-

мер, методами теории распознавания образов решить задачи диагностирования в $\{X\}$ относительно элемента $X^э$ [61, 62].

Особенность $\{X\}$ состоит в том, что оно является функциональным пространством. Необходимым условием решения задачи диагностирования в функциональном пространстве является существование метрики в этом пространстве. В общем случае функциональное пространство выходных реакций ТС на интервале времени диагностирования может не удовлетворять аксиомам метрического пространства [24]. Если аксиомы метрического пространства не удовлетворяются, то нельзя определить расстояние между элементами пространства и, следовательно, корректно решить задачу диагностирования.

В свою очередь, существует значительное количество видов функциональных пространств, удовлетворяющих аксиомам линейного нормированного пространства: пространство $\{X(t)\}$, $t \in [t_д^1, t_д^2]$ непрерывных функций с нормой

$$\| X(t) \| = \max \{ \max_{t \in [t_д^1, t_д^2]} | x_i(t) |, \ i = \overline{1, q} \}; \tag{2.28}$$

пространство интегрируемых квадратов функций

$$\int_{t_д^1}^{t_д^2} x_i^2(t)\, dt < \infty, \quad i = \overline{1, q}, \tag{2.29}$$

которое не требует непрерывности $X(t)$, $t \in [t_д^1, t_д^2]$, а требует лишь сходимости интеграла (2.29) и т. п.

Многообразие линейных нормированных функциональных пространств позволяет определить пространство технических состояний на множестве выходных реакций L_X.

В пространстве L_X всегда существует базис, т. е. система линейно независимых функций $l_i(t)$, $i = \overline{1, Q}$, но не существует размерности $(Q \to \infty)$, L_X — бесконечномерно.

Если в качестве вектора технического состояния Y в L_X определить базис произвольной, но конечной размерности в виде

$$Y = a_0 l_0 + a_1 l_1 + \ldots + a_Q l_Q,$$

где a_i, $i = \overline{0, Q}$ — координаты вектора состояния (действительные числа обобщенного ряда Фурье), то хотя и существует элемент наилучшего приближения Y_0 к любому элементу из L_X, но это приближение всегда будет сопровождаться ошибкой

$$\delta = \| X - Y_0 \|, \tag{2.30}$$

зависящей от размерности Y_0. Наличие ошибки δ оказывает существенное влияние при разделении L_X на виды технических состояний, т. е. является основным источником методической ошибки результатов диагностирования.

При увеличении размерности Y ошибки $\delta \to 0$, но при этом общая достоверность $Д$ также стремится к нулю, как функция числа измеряемых параметров.

В настоящее время вопросы определения L_X, вектора состояния в L_X и влияния ошибок приближения δ на общую достоверность диагностирования еще мало исследованы. Попытки практического решения задачи диагностирования в L_X без детального исследования этих вопросов приводят к низкой достоверности результатов диагностирования ТС [42].

3. Методы функционального диагностирования технических систем. Основными достоинствами методов ФД являются:

— непрерывность диагностирования ТС в процессе ее работы по назначению;

— оперативность получения информации о виде технического состояния;

— средние интегральные затраты связаны лишь с аппаратурной реализацией и математическим обеспечением алгоритмов ФД.

Принципиальное отличие методов ФД заключается в использовании для целей диагностирования только рабочих входных воздействий $U=(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, все или часть которых обладают свойствами неопределенности. Если все координаты U являются детерминированными, то ФД представляет собой один из вариантов ТД без организации специального режима диагностирования ТС. Поэтому математическая задача ФД ставится, когда u_i, $i=\overline{1, m}$ являются случайными величинами или случайными процессами с известными статистическими характеристиками.

По заданным статистическим характеристикам U и мешающих возмущений N при известной модели диагностирования (1.1) методами теории оценивания и оптимального управления определяются номинальные значения вектора параметров $K^н$, показателя качества $Ф^* \in [Ф^1, Ф^2]$ и эталонные выходные реакции $X^э$.

В процессе применения ТС по назначению входные воздействия принимают любые заранее неизвестные значения $U \in \{U\}$ и $N \in \{N\}$. Особенно такая ситуация характерна для информационных ТС, предназначенных для измерения неизвестных входных воздействий U в условиях мешающих помех N. Для таких ТС показатель качества Ф, заданный в виде (1.2) или (1.3), и выходные реакции X согласно модели (1.1) зависят от неизвестных U, N и K, что является главным отличием задачи ФД от ТД.

В пространстве $L_Ф$ математические методы ФД аналогичны методам ТД за исключением задачи управления видом технического состояния, которая не имеет корректного решения даже при совпадении размерностей $L_Ф$ и $\{K\}$ из-за неизвестных значений U и N. Кроме этого, если по результатам измерения $\tilde{Ф}$ принимается решение $Ф \notin [Ф^1, Ф^2]$, то из этого не следует однозначный вывод об отклонении параметров K от $K^н$ на недопустимую величину, так как причиной неработоспособного состояния ТС могут быть недопустимые значения входных воздействий U и N (ложный отказ). С другой стороны, при $Ф \in [Ф^1, Ф^2]$ возможно отклонение K от $K^н$ на недопустимую величину, но U и N «компенсируют» в Ф эти отклонения. В первом случае по результатам ФД система признается неработоспособной, но при дальнейшем диагностировании на другом интервале времени отказ может не подтвердиться. Во втором случае возникает необнаруженный отказ ТС, но вмешательство в ТС с целью регулировки параметров K к номинальному значению $K^н$ не требуется особенно в тех обстоятельствах, когда на коротком отрезке времени ТС выполняет дорогостоящую и важную работу.

Методы ФД в функциональном пространстве L_X мало исследованы, будут иметь те же особенности, что и при ТД, но дополнительно к ошибкам приближения добавятся ошибки, связанные с неопределенностью входных воздействий.

В пространстве технических состояний L_K элементы являются независимыми, поэтому основные методы ФД используют L_K.

Размерности L_K и вектора технического состояния $K=(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ обусловлены заданной глубиной диагностирования. В методах ТД глубина диагностирования обеспечивается за счет искусственно созданных входных воздействий. В методах ФД размерность U фиксирована и глубина диагностирования, как правило, является следствием метода ФД. Если же глубину ФД задавать, то стоимость аппаратуры и вычислительных средств для ее обеспечения может превышать все допустимые пределы. Поэтому глубина диагностирования при ФД является предметом дополнительных исследований [43].

Разделение L_K на виды технических состояний $Q_X{}^j$, $j=\overline{0, S}$ производится для фиксированных статистических характеристиках U и N, так же как в методах ТД.

Разработка математической модели перехода из $Q_K{}^j$ в $Q_K{}^i$, $i, j=\overline{0, S}$ не зависит от метода диагностирования и обусловлена внутренними свойствами ТС и условиями эксплуатации. Априорные вероятности состояний $P(K\in Q_K{}^j)$ и распределение $W(K, t)$ определяются аналогично методам ТД.

Для однозначного определения K измеряются все координаты k_i, $i=\overline{1, r}$. Если в ТС все координаты k_i, $i=\overline{1, r}$ доступны прямым измерениям в процессе функционирования системы по назначению, то в решении последующих задач диагностирования и управления проблем не возникает.

Главная проблема ФД — определение вида технического состояния, когда значения координат K получают в результате косвенных измерений, т. е. путем измерения входных воздействий и выходных реакций. Так как при ФД входные воздействия U не известны, то результаты измерений выходных реакций будут зависеть как от значений K, так и от U согласно модели функционирования ТС, т. е. входные воздействия U будут вносить дополнительную неопределенность при определении значений K.

В обзоре по ФД динамических систем [63] изложена классификация различных постановок задач ФД и методов их решения. С точки зрения применения математических методов они подразделяются на две группы. Первая группа методов использует результаты теории идентификации [60, 64], а вторая группа — теории инвариантности [66, 67].

Исходными данными задачи ФД, решение которой основано на методах теории идентификации, являются:

— математическая модель ТС (1.1);

— априорные статистические описания U и N в виде известных распределений $W_U(U, t)$ и $W_N(N, t)$, на множествах $U\in\{U\}$, $N\in\{N\}$;

— распределение $W(K, t)$, $K\in L_K$, $t\in[t_0, t)$ и виды технических состояний $Q_K{}^j$, $j=\overline{0, S}$;

— математическая модель измерения выходных реакций

$$\hat{X}=H(X, \Delta X) \qquad (3.1)$$

с известным стационарным распределением ошибок измерений $W_{\Delta X}(\Delta X)$.

Выделение и минимизация числа измеряемых выходных реакций производится так же, как в (2.21) и (2.22), за исключением дополнительного требования к якобианам преобразований, которые должны быть отличными от нуля для любых $U\in\{U\}$ и $N\in\{N\}$.

Функция потерь и решающее правило о виде технического состояния по результатам измерений в ФД не имеют принципиальных отличий от методов ТД.

По существу результаты теории идентификации применяются при синтезе оптимального алгоритма определения вида технического состояния. В частности, используется раздел теории, связанный с идентификацией параметров при адаптивном оценивании входных полезных воздействий из числа U.

Синтез оптимального алгоритма определения вида технического состояния производится по двум направлениям.

Первое направление связано с включением вектора K в вектор X, т. е. с увеличением его размерности $X_c=[X, K]$ и решением задачи оптимального оценивания $X_c{}^*$ вектора X_c по результатам наблюдения $\hat{X}$. Оптимальная (в смысле минимума дисперсии оценки) $X_c{}^*=[X^*, K^*]$ позволяет одновременно получить оценки выходных реакций и параметров ТС. По оптимальной оценке K^* принимается решение о виде технического состояния $Q_K{}^j$, $j=\overline{0, S}$. Однако, применение такого подхода даже для простейших стационарных линейных уравнений (1.1) приводит к устройству оценивания K^*, которое реализуется в виде счетного множества нелинейных стохастических уравнений в частных производных [68]. Практическая реализация такого устройства невозможна, а при субоптимальной реализации практически невозможно оценить точность аппроксимации [68].

Второе направление основано на теореме разделения, позволяющей отдельно получить оценку X^* и оценку K^* [68, 69]. Оптимальную оценку K^* получают из апостериорной плотности

$$W_K(K, t \mid \hat{X}) = \frac{W_{\hat{X}}(\hat{X}, t \mid K) \cdot W(K, t)}{\int\limits_{\{k\}} W(\hat{X}, t \mid K) \cdot W(K, t)\, dK}, \qquad (3.2)$$

например, по минимуму среднего квадрата ошибки, максимуму апостериорной плотности и т. п.

Апостериорная плотность (3.2) вычисляется следующим образом. По известным $W_U(U, t)$, $W_N(N, t)$ и виду функционального преобразования (1.1) при фиксированном значении K определяется условная плотность $W(X, t|K)$

$$W(X, t|K) = \int\limits_{\{U\}} W_N\{F^{-1}(U, K, X, t)\} W_U(U, t) \left| \frac{\partial F^{-1}}{\partial X} \right| dU, \qquad (3.3)$$

где $F^{-1}(\cdot)$ — обратное преобразование в (1.2) относительно вектора мешающих возмущений N.

По известной модели измерения (3.1), плотности ошибок измерения $W_{\Delta X}(\Delta X)$ и плотности (3.3) находится условная плотность $W_{\hat{X}}(\hat{X}, t|K)$ как

$$W_{\hat{X}}(\hat{X}, t \mid K) = \int\limits_{\{X\}} W_{\Delta X}\{H^{-1}(\hat{X}, X)\} \left| \frac{\partial H^{-1}(\cdot)}{\partial \hat{X}} \right| dX, \qquad (3.4)$$

где $H^{-1}(\cdot)$ — обратное преобразование (3.1) относительно ΔX.

Затем с помощью (3.4) и известной $W(K, t)$ определяется апостериорная плотность (3.2), формирующая оценку K^*. Если $K^* \in Q_K{}^j$, $j=\overline{1, S}$, то производится управление видом технического состояния к номинальной точке $K^н$.

Алгоритм поиска вида технического состояния, использующий теорему разделения, позволяет практически реализовать программные и аппаратурные средства ФД, обеспечивающие заданную глубину диагностирования.

Оценка методической достоверности $Д_м$ производится при абсолютно точном измерении, т. е. $\hat{X}=X$. Условная плотность для байесовского решающего правила вычисляется из (3.3) как

$$W(X, t \mid K \in Q_K{}^j) = \int\limits_{Q_K{}^j} W(X, t \mid K)\, W(K, t)\, dK. \qquad (3.5)$$

Далее, как и при ТД, определяются области $\bar{Q}_K{}^j$, вычисляется суммарная ошибка P_{ij} и верхняя граница вероятности ошибки $P_{0м}$.

В работе [70] исследованы вопросы оценки $Д_м$ при идентификации параметров при адаптивном оценивании, где показано, что из-за неопределенности входных воздействий U методическая достоверность $Д_м$ при диагностировании незначительно отличается от априорной.

Основная задача теории инвариантности заключается в синтезе структуры и определении параметров ТС, обеспечивающих независимость измеряемых входных воздействий (информационных сигналов) U от мешающих возмущений N (помех) произвольного вида (с любыми статистическими характеристиками).

Особенность применения результатов теории инвариантности применительно к ФД состоит в том, что для определения вида технического состояния $Q_K{}^j$, $j=\overline{0, S}$ из результатов измерений необходимо исключить не только мешающие возмущения N, но и неизвестные U, т. е. результаты

измерений зависят только от K, характеризующего вид технического состояния.

Исходными данными задачи ФД, решаемой на основе принципов теории инвариантности, являются:

— математическая модель ТС в виде (1.1);

— известные $W(K, t)$, $K \in \{K\}$, $t \in [t_0, t)$ и виды технических состояний Q_K^j, $j=\overline{0, S}$;

— математическая модель измерения выходных реакций типа (3.1) с известным распределением ошибок измерений $W_{\Delta X}(\Delta X)$.

В отличие от методов идентификации не требуется знания априорных распределений $W_U(U, t)$ и $W_N(N, t)$. Кроме того, не решается задача минимизации числа измеряемых выходных реакций, напротив в ТС выделяется максимальное число выходных реакций, доступных для измерений с целью ФД.

Результаты теории инвариантности используются для выделения в ТС выходных реакций, с помощью которых образуются контрольные условия, справедливые для любых значений входных воздействий $U \in \{U\}$ и $N \in \{N\}$. Контрольные условия задают алгоритм устройства ФД и определяют затраты на процедуру диагностирования.

В [63] проведено достаточно подробное обсуждение методов синтеза контрольных условий, которые подразделяются на две группы:

— методы, использующие естественную избыточность и введение избыточных переменных;

— применение дополнительных элементов для целей диагностирования, определенным образом связанных с элементами ТС и между собой. К этой группе относятся методы дублирования, применение различных видов дополнительных математических моделей к ТС типа наблюдателя Люенбергера, фильтра Калмана и т. п. [73, 84, 85].

Для обеих групп методов задача синтеза контрольных условий в формализованном виде решается на основе необходимых и достаточных условий абсолютной инвариантности, сформулированных и развитых в работах [66, 67, 71, 72].

Техническая система обладает естественной избыточностью, если число независимых выходных реакций больше, чем суммарная размерность векторов входных воздействий и мешающих возмущений. Система (1.1) обладает естественной избыточностью, если размерность X больше суммарной размерности U и N и ранг матрицы

$$\operatorname{rank}\left[\frac{\partial F_i}{\partial U_j} \vdots \frac{\partial F_i}{\partial n_j}\right] \geqslant m+l, \quad i=\overline{1, q}, \ j=\overline{1, m}+l \tag{3.6}$$

и $q>m+l$ для любых $U \in \{U\}$ и $N \in \{N\}$.

Выполнение условия (3.6) позволяет представить (1.1) в виде системы уравнений

$$x_i=f_i(K, N, U, t), \quad i=\overline{1, q} \tag{3.7}$$

и разрешить первые $m+l$ уравнений относительно U и N

$$U_j=U_j(K, X, t), \quad j=\overline{1, m},$$
$$N_j=N_j(K, X, t), \ j=\overline{1, l}. \tag{3.8}$$

Уравнения (3.8) подставляются в оставшиеся $q-(m+l)$ уравнений (3.7) вместо N и U и получаются $q-(m+l)$ контрольных условий, инвариантных к N и U в виде

$$x_i=f_i(K, X, t), \quad i=\overline{1, q-(m+l)}. \tag{3.9}$$

Если размерность K, равная $r \leqslant q-(m+l)$, и ранг матрицы

$$\operatorname{rank}[\partial f_i(\cdot)/\partial k_j] \geqslant r, \quad i=\overline{1,\ q-(m+l)}, \quad j=\overline{1,\ r} \tag{3.10}$$

для любых $K \in \{K\}$, то в результате измерения X в (3.9) однозначно определяются координаты K, т. е. обеспечивается заданная глубина диагностирования. Средние интегральные затраты на реализацию процедуры диагностирования включают в себя затраты на измерения X и организацию вычислительной процедуры определения K.

Если $r \geqslant q-(m+l)$, либо ранг (3.10) меньше r, заданная глубина диагностирования не обеспечивается, т. е. k_i, $i=\overline{1,\ r}$ определяются неоднозначно. В этом случае задача ФД имеет два пути решения:

— уменьшение глубины диагностирования до числа контрольных условий;

— применение второй группы методов синтеза контрольных условий.

Применение различного рода дублирований и дополнительных моделей наряду с увеличением средних интегральных затрат (что в общем оправдано заданной глубиной диагностирования) имеет один существенный недостаток. Введение дополнительных элементов в структуру ТС с известными параметрами, которые обозначим вектором K_Φ, с целью синтеза контрольных условий снижает надежность ТС в целом. Отказы дополнительных элементов с параметрами K_Φ воспринимаются так же, как и отказы ТС, т. е. отказы ТС и дополнительных элементов различимы между собой только в вероятностном смысле [71], т. е. ненадежность параметров K_Φ вносит дополнительную неопределенность в результат измерений X.

Поэтому главным требованием к дополнительным элементам является их более высокая надежность по сравнению с элементами ТС. Однако, если это требование будет обеспечено, то целесообразно вместо элементов ТС использовать дополнительные элементы, так как те и другие «работают» с одинаковыми видами входных воздействий.

Поэтому на практике дополнительные элементы выбираются из компромиссных условий: с одной стороны, увеличение глубины диагностирования; с другой стороны, уменьшение надежности ТС.

При использовании дополнительных элементов синтез контрольного условия производится аналогично (3.7), (3.8), (3.9) при увеличении числа уравнений в (3.7) за счет дополнительных элементов с параметрами K_Φ

$$x_j = f_j(K_\Phi, X, N, U, t), \quad j=1, 2, \ldots, \tag{3.11}$$

введенных в структуру ТС. В результате контрольные условия будут отличаться от (3.9) наличием в них параметров K_Φ, т. е.

$$x_i = f_i(K, K_\Phi, X, t), \quad i=1, 2, \ldots \tag{3.12}$$

Исходными данными для оценки достоверности ФД на основе методов теории инвариантности являются:

— контрольные условия в виде (3.9) или (3.12);

— плотность $W(K, t)$, Q_K^j, $j=\overline{0,\ S}$ и плотность $W(K_\Phi, t)$, $K_\Phi \in \{K_\Phi\}$;

— математическая модель измерения X с известной плотностью ошибок измерений ΔX в виде (3.1).

Особенности оценки $Д_м$ при ФД исследованы в [43], где показана зависимость $Д_м$ от вида контрольных условий и распределения $W(K_\Phi, t)$.

Инструментальная достоверность $Д_и$ оценивается так же, как и при других методах диагностирования, и зависит от модели измерения и распределения ошибок измерения, обусловленных аппаратурной реализацией средств измерения.

Заключение. Проблема эффективного решения задачи диагностирования сложной технической системы представляет значительный теоретический и практический интерес. В настоящей работе охвачена только часть этой

проблемы, связанная с корректным применением различных математических методов к взаимосвязанным задачам, которые должны решаться в процессе диагностирования технической системы. Вне рамок данной работы остались такие важные с точки зрения применения математических методов вопросы, как:

— методы оценки ошибок аппроксимации моделей функционирования ТС специальными диагностическими моделями;

— большое количество методов параметрической идентификации при оценивании параметров ТС в процессе тестового диагностирования;

— методы оценки достоверности функционального диагностирования с учетом введенной в ТС аппаратурной или алгоритмической избыточности для целей диагностирования и другие вопросы, связанные с оригинальным решением отдельных задач диагностирования.

Тем не менее изложенные методы позволяют конструктивно решать большое число практических задач по технической диагностике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карибский В. В., Пархоменко П. П., Согомонян Е. С., Халчев В. Ф.* Основы технической диагностики. Модели объектов, методы и алгоритмы диагноза. М.: Энергия, 1976.
2. *Пархоменко П. П., Согомонян Е. С.* Основы технической диагностики. Оптимизация алгоритмов диагностирования, аппаратурные средства. М.: Энергия, 1981.
3. *Богомолов А. М., Грунский И. С., Сперанский Д. В.* Контроль и преобразования дискретных автоматов. Киев, Наук. думка, 1975.
4. *Биргер И. А.* Техническая диагностика. М.: Машиностроение, 1978.
5. *Дятлов В. А., Кабанов А. Н., Милов Л. Т.* Контроль динамических систем. М.: Энергия, 1978.
6. *Евланов Л. Г.* Контроль динамических систем. М.: Наука, 1979.
7. *Мозгалевский А. В., Гаскаров Д. В.* Техническая диагностика. М.: Высшая школа, 1975.
8. *Кудрицкий В. Д., Синица М. А., Чинаев П. И.* Автоматизация контроля радиоэлектронной аппаратуры/Под ред. П. И. Чинаева. М.: Сов. радио, 1977.
9. *Глумов В. М., Земляков С. Д., Рутковский В. Ю., Силаев А. В.* Алгоритмическое обеспечение отказоустойчивости систем автоматического управления. Обзор // АиТ, 1988, № 9.
10. *Доценко Б. И.* Диагностирование динамических систем. Киев: Техніка, 1983.
11. Отказоустойчивые цифровые системы (тематический выпуск) // ТИИЭР, 1978, Т. 66. № 10.
12. *Нечипоренко В. И.* Структурный анализ и методы построения надежных систем. М.: Сов. радио, 1968.
13. *Подлесный Н. И.* О живучести сложных систем управления // Системы управления летательных аппаратов. Вып. 4, Харьков: Харьковск. авиацион. ин-т, 1978.
14. *Дмитриев А. Н., Кузин Е. И., Фаронов В. В., Макаров А. И.* Проектирование автоматических систем управления автономными объектами с учетом живучести // Системы автоматического управления. Тр. МВТУ. № 360. М. 1981.
15. *Волик Б. Г., Рябинин И. А.* Эффективность, надежность и живучесть управляющих систем // АиТ. 1984. № 12.
16. *Антонов А. В., Буянов Б. Б., Викторов В. С. и др.* Надежность, эффективность и живучесть управляющих систем // Системы управления и их применения (сб. трудов). М.: Ин-т проблем управления. 1985.
17. *Додонов А. Г., Кузнецова М. Г.* Проблемы и тенденции создания живучих вычислительных систем: Методические разработки. Киев: Наук. думка, 1981.
18. *Новиков В. С.* Техническая эксплуатация авиационного радиоэлектронного оборудования. М.: Транспорт, 1987.
19. Контроль автоматизированный технического состояния изделий авиационной техники. ГОСТ. 19919-74.
20. Техническая диагностика. Гост 20911-75.
21. *Волгин Л. Н.* Принцип согласованного оптимума. М.: Советское радио, 1977.
22. *Астапов Ю. М., Медведев В. С.* Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1982.
23. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
24. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969.
25. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
26. Вопросы математической теории надежности./Под редакцией Б. В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983.
27. *Смирнов Н. Н., Ицкович А. А.* Обслуживание и ремонт авиационной техники по состоянию. М.: Транспорт, 1987.

28. *Барзилович Е. Ю., Воскобоев В. Ф.* Эксплуатация авиационных систем по состоянию. М.: Транспорт, 1981.
29. *Барзилович Е. Ю., Савенков М. В.* Статистические методы оценки состояния авиационной техники. М.: Транспорт, 1987.
30. *Москатов Г. К.* Проблемы надежности адаптивных систем автоматического управления // Электронное моделирование, 1980. № 4.
31. *Байхельт Ф., Франкен П.* Надежность и техническое обслуживание. Математический подход. М.: Радио и связь, 1988.
32. *Волков Л. И.* Управление эксплуатацией летательных комплексов. М.: Высшая школа, 1987.
33. *Мороз А. И.* Курс теории систем. М.: Высшая школа, 1987.
34. *Фукунага К.* Введение в статистическую теорию распознавания образов. М.: Наука, 1979.
35. *Тихонов В. И.* Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982.
36. *Крамер Г.* Математические методы статистики: Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
37. *Вальд А.* Статистические решающие функции.– В кн. Позиционные игры: Пер. с англ./Под ред. Н. Н. Воробьева, И. И. Врублевской. М.: Наука, 1967.
38. *Сосулин Ю. Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М.: Сов. радио, 1978.
39. Метрология. Термины и определения. ГОСТ 16263-70.
40. *Савин С. К., Никитин А. А., Кравченко В. И.* Достоверность контроля сложных радиоэлектронных систем летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1984.
41. *Согомонян Е. С.* Достоверность самотестирования с использованием средств функционального диагностирования. // АиТ, 1988. № 10.
42. *Кузьмин А. Б.* Достоверность допусковых методов контроля сложных технических систем. // АиТ. 1987. № 10.
43. *Задорожный Д. Ю., Калугин П. А., Кузьмин А. Б.* Методическая достоверность функционального контроля и диагностирования информационных систем. // АиТ. 1989. № 6.
44. *Пашковский Г. С.* Задачи оптимального обнаружения и поиска отказов в РЭА. М.: Радио и связь, 1981.
45. Надежность технических систем. Справочник./Под ред. И. А. Ушакова. М.: Радио и связь, 1985.
46. *Давыдов П. С.* Техническая диагностика радиоэлектронных устройств и систем. М.: Радио и связь, 1988.
47. *Воскобоев В. Ф., Кузьмин А. Б.* Метод выбора обобщенных параметров при диагностировании состояния технических систем. // Основные вопросы теории и практики надежности. Минск.: Наука и техника, 1982.
48. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
49. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
50. *Ярлыков М. С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985.
51. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана – Бьюси. М.: Наука, 1982.
52. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М.: Наука, 1971.
53. *Старков К. Е.* Синтез функций наблюдения для некоторых классов динамических систем. // АиТ. 1982. № 5.
54. *Васюкевич В. О.* К диагностике комбинационных схем. // АиТ. 1988. № 3.
55. *Сагалович Ю. Л.* Возможности фиксированного сигнатурного анализатора при произвольном удлинении тестовой последовательности. // АиТ. 1988. № 6.
56. *Колесов Н. В.* Диагностирование линейных дискретных нестационарных систем. // АиТ. 1988. № 7.
57. *Никитин В. И.* Моделирование процессов оптимального управления комплексами с избыточностью по состоянию. Основные вопросы теории и практики надежности. М.: Наука и техника, 1982.
58. *Хазен Э. М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968.
59. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.
60. Справочник по теории автоматического управления./Под ред. А. А. Красовского. М.: Наука, 1987.
61. *Журавлев Ю. И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. // Проблемы кибернетики, 1978. Вып. 33.
62. *Воскобоев В. Ф., Алексеева В. Б., Юрков Ю. А.* К вопросу распознавания технического состояния сложной системы. // Основные вопросы теории и практики надежности. М.: Сов. радио. 1980.
63. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование динамических систем. // АиТ. 1980. № 8.
64. *Райбман Н. С.* Что такое идентификация? М.: Наука, 1970.
65. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
66. *Кухтенко А. И.* Проблема инвариантности в автоматике. Киев.: Изд-во техн. лит-ры, УССР, 1963.

67. *Петров Б. Н., Викторов В. А., Лункин Б. В., Совлуков А. С.* Принцип инвариантности в измерительной технике. М.: Наука, 1976.
68. *Лайниотис Д. Г.* Разделение – единый метод построения адаптивных систем. Ч. I. Оценивание. // ТИИЭР. 1976. Т. 64. № 8.
69. *Миронов М. А., Ярлыков М. С.* Оптимальные дискретные алгоритмы функционального диагностирования технического состояния динамических систем. // АиТ. 1985. № 10.
70. *Кузьмин А. Б.* Эффективность идентификации параметров при адаптивном оценивании. // Техн. кибернет. 1988. № 4.
71. *Калугин П. А., Кузьмин А. Б., Шрамко В. И.* Принцип абсолютной инвариантности при функциональном контроле информационных систем. // АиТ. 1988. № 11.
72. *Рутковский В. Ю., Земляков С. Д., Глумов В. М.* Инвариантность в самонастраивающихся системах координатно-параметрического управления и в задачах повышения отказоустойчивости. // VII Всесоюзн. совещание по теории инвариантности, теории чувствительности и их применениям. Баку: АИНХ, 1987.
73. *Гильбо Е. П., Челпанов И. Б.* Обработка сигналов на основе упорядоченного выбора. М.: Сов. радио, 1975.
74. *Avizienis A. N.* Fault – tolerant systems // IEEE Trans. Comput., 1976. V. C–25. N 12.
75. *Duhamel P., Rault J.-C.* Automatic test generation techniques for analog circuits and systems: a review // IEEE Trans. Circuits and Systems. 1979. V. CAS–26. N 7.
76. *Badgett M. E., Walker R. A., Haiges K. R.* Robast fault detection and isolation for a high performance aircraft on STOL approach // AIAA Guid. Nav. and Contr. Conf. Williamsburg. Va. 1986.
77. *Gupta N. K., Walker R. A.* Robust Fault Detection Techniques // AIAA Guid, Nav. and Contr. Conf. WA, August 20–22. 1984.
78. *Bonnice W. F., Wagner E., Motyka P., Hall S. R.* The Application of the Detection Filter to Aircraft Failure Detection and Isolation // AIAA Guid. Nav. and Control Conf., Snowmass. CO. August. 1985.
79. *Kosut R. L.* Robust Fault Detection, Isolation and Accomodation to Support Integrated Aircraft Control // AIAA Guid. and Contr. Conf., Gathinburg. TN. August. 1983.
80. *Jackson T.* Improving build-in-test designs // AIAA Pap. 1987. N 2945. I-4.
81. *Jackson T.* Improved Onboard Fault Finding. PD7-920, MDC 00877-7. Vol. 3. February. 1986.
82. *Drew I. A., Jackson T. H.* Onboard Fault Finding and Technical Data. PD7–920, MDC 00885-7. Vol. 3. February. 1987.
83. *Jaraiedi M., Kochhar D. S., Jaisingh S. C.* Multiple inspections to meet desired outgoing quality // J. Qual. Technol. 1987. 19. N 1.
84. *Moore J., Ledwich G.* Minimal order observers for estimating linear functions of a state vector // IEEE Trans. Automat. Control. AC-20. 1975. N 5.
85. *Futura K., Kawaji S.* Linear function observer with possibly minimal dimension // IEEE Trans. Automat. Control, AC-22. 1977. N 6.

Москва

Поступила в редакцию
14.XII.1989

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 62-50

А. Г. ГАБЕЛАЯ

НОВЫЙ КРИТЕРИЙ ИНВАРИАНТНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Для линейных автономных систем с неполной информацией предлагается новый эффективный критерий инвариантности собственных значений относительно обратной связи по выходу. Показаны возможности обобщения полученных результатов.

Введение. В последнее время большое внимание уделяется задачам модального управления и стабилизаций [1] динамических систем с неполной информацией относительно вектора состояния. Наибольший интерес представляет нахождение эффективных условий разрешимости этих задач.

В связи с этим интересна проблема инвариантности спектральных значений относительно обратной связи по выходу. В работе [2] в предположении полной управляемости системы был разработан критерий инвариантности собственного значения. В общем случае, такой критерий излагался в работе [3].

В настоящей работе предлагается новый критерий инвариантности собственных значений линейных автономных систем с неполной информацией.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему

$$\dot{x}=Ax+Bu,\qquad y=Hx, \tag{1.1}$$

где $x\in R^n$, $u\in R^m$, $y\in R^l$, $(m<n;\ l<n)$ соответственно векторы состояния, управления и наблюдения системы, A, B, H — постоянные матрицы соответствующих размерностей. При этом считаем, что матрицы B и H имеют полный ранг, т. е.

$$\operatorname{rank} B=m;\quad \operatorname{rank} H=l. \tag{1.2}$$

Собственное значение системы λ_0 $(|A-\lambda_0E_n|=0)$ назовем инвариантным относительно обратной связи по выходу [2–3]:

$$u=Cy=CHx,$$

если для любого C выполняется условие

$$|A-\lambda_0E_n+BCH|=0,$$

здесь E_n — единичная n-мерная матрица.

Иногда ниже инвариантное собственное значение называется инвариантным спектральным значением.

2. Формулировка критерия инвариантности. Критерий инвариантности собственного значения для общего случая был найден в работе [3]. Приведем этот результат.

Теорема 1. Для инвариантности собственного значения системы (1.1) λ_0 $(|A-\lambda_0E_n|=0)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого значения r; $r=1, 2, \dots, \min(m, l)$, условие

$$\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\dots<j_r\leqslant n} \Delta^{i_1,\dots,i_r}_{j_1,\dots,j_r}(\lambda_0)\, H^{j_1,\dots,j_r}_{k_1,\dots,k_r}=0$$

выполнялось при любых $k_1, \dots, k_r$ и $i_1, \dots, i_r$, где

$$1\leqslant k_1<k_2<\dots<k_r\leqslant l$$
$$1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_r\leqslant m.$$

Здесь $\Delta_{j_1,\ldots,j_r}^{i_1,\ldots,i_r}(\lambda_0)$ – определитель матрицы, получаемой заменой соответственно $j_1,\ldots,j_r$-х столбцов матрицы $A-\lambda_0 E_n$, $i_1,\ldots,i_r$-ми столбцами B; $H_{k_1,\ldots,k_r}^{j_1,\ldots,j_r}$ – минор, соответствующий $j_1,\ldots,j_r$-м столбцам и $k_1,\ldots,k_r$-м строкам матрицы H.

В настоящей работе предлагается новый критерий инвариантности собственных значений относительно обратной связи по выходу, имеющий значительно более простой вид. Имеет место следующая

Теорема 2. Для инвариантности собственного значения системы (1.1) λ_0 ($|A-\lambda_0 E_n|=0$) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{cases} \operatorname{rank}\ (A-\lambda_0 E_n,\ B)=n, \\ \operatorname{rank}\ (A^T-\lambda_0 E_n,\ H^T)=n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Доказательство. Необходимость.

Заметим сначала, что

$$(A-\lambda_0 E_n+BCH)=(A-\lambda_0 E_n, B)\begin{pmatrix} E_n \\ CH \end{pmatrix}$$

и

$$(A^T-\lambda_0 E_n+H^T C^T B^T)=(A^T-\lambda_0 E_n, H^T)\begin{pmatrix} E_n \\ C^T B^T \end{pmatrix}.$$

Откуда в силу известного свойства ранга произведения матриц

$$\operatorname{rank} MN\leqslant\min(\operatorname{rank} M, \operatorname{rank} N)$$

следует, что матрицы C для которой

$$\operatorname{rank}\ (A-\lambda_0 E_n+BCH)=\operatorname{rank}\ (A^T-\lambda_0 E_n+H^T C^T B^T)=n$$

не существует, если не выполняется условие (2.1).

Достаточность. В силу условия (1.2), без ограничения общности [4], можем считать, что матрица H имеет вид

$$H=(H_1, H_2),$$

где H_1 – неособенная $l\times l$-матрица ($|H_1|\neq 0$).

Неособым линейным преобразованием

$$z=Lx,$$

где

$$L=\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ 0 & E_{n-l} \end{pmatrix}$$

($|L|=|H_1|\neq 0$), систему (1.1) приведем к виду [4]

$$\begin{aligned} \dot z&=\tilde A z+\tilde B u, \\ y&=(E_l, O)\, z, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\tilde A=LAL^{-1},$$
$$\tilde B=LB.$$

При этом

$$L^{-1}=\begin{pmatrix} H_1^{-1} & -H_1^{-1}H_2 \\ O & E_{n-l} \end{pmatrix}.$$

Представив предварительно матрицу $\tilde A$ в виде

$$\tilde A=(\tilde A_1, \tilde A_2),$$

где $\tilde A_1$ и $\tilde A_2$ – прямоугольные матрицы размерностей $n\times l$ и $n\times(n-l)$ соответственно, запишем условие (2.1) для полученной после преобразования системы (2.2).

Имеем

$$\begin{cases} \operatorname{rank}(\tilde A_1-\lambda_0 E_{1,n};\ \tilde A_2-\lambda_0 E_{2,n};\ \tilde B)=n, \\ \operatorname{rank}(\tilde A_1^T-\lambda_0 E_{1,n};\ \tilde A_2^T-\lambda_0 E_{2,n};\ H^T)= \\ =\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \tilde A_1-\lambda_0 E_{1,n}; & \tilde A_2-\lambda_0 E_{2,n} \\ E_l; & 0 \end{pmatrix}=n, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $E_{1,n}$ и $E_{2,n}$ обозначают соответственно первые l и последние $n-l$ столбца матрицы E_n.

Из соотношения (2.3) получаем окончательно

$$\begin{cases} \operatorname{rank}(\tilde{A}_1-\lambda_0 E_{1,n};\ \tilde{A}_2-\lambda_0 E_{2,n};\ \tilde{B})=n, \\ \operatorname{rank}(\tilde{A}_2-\lambda_0 E_{2,n})=n-l. \end{cases} \tag{2.4}$$

Сейчас доказательство достаточности условий теоремы сводится к доказательству того факта, что из выполнения (2.4) следует существование матрицы $\tilde{C}$ (размерности $m\times l$), удовлетворяющей условию

$$|\tilde{A}_1-\lambda_0 E_{1,\,n}+\tilde{B}\tilde{C};\ \tilde{A}_2-\lambda_0 E_{2,\,n}|\neq 0. \tag{2.5}$$

Заметим прежде всего, что согласно (2.4) из столбцов матрицы $(\tilde{A}-\lambda_0 E_n,\ \tilde{B})$ можно составить неособенную матрицу вида

$$((\tilde{A}_1-\lambda_0 E_{1,\,n};\ \tilde{B})_l;\ \tilde{A}_2-\lambda_0 E_{2,\,n}), \tag{2.6}$$

где через $(\tilde{A}_1-\lambda_0 E_{1,\,n};\ \tilde{B})_l$ обозначена некоторая $n\times l$-матрица, составленная из столбцов матрицы $(\tilde{A}_1-\lambda E_{1,\,n};\ \tilde{B})$ (в силу $|\tilde{A}-\lambda_0 E_n|=0$ $(\tilde{A}_1-\lambda_0 E_{1,\,n};\ \tilde{B})_l$ непременно будет содержать по крайней мере один столбец матрицы $\tilde{B}$).

Наконец, для полного доказательства теоремы нам остается показать, что из последнего обстоятельства следует существование $\tilde{C}$, для которой имеет место (2.5) (т. е. неинвариантность λ_0).

Для простоты и наглядности изложения покажем справедливость последнего предложения для случая $n=3$; $m=l=2$. (В общем случае, доказательство совершенно аналогично.)

В этом случае

$$\tilde{A}=(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\tilde{a}_3);\quad \tilde{B}=(\tilde{b}_1,\tilde{b}_2);\quad \tilde{C}=\begin{pmatrix}\tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12}\\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22}\end{pmatrix},$$

условие (2.4) примет вид

$$\begin{cases} \operatorname{rank}(\tilde{a}_1-\lambda_0 e_1,\ \tilde{a}_2-\lambda_0 e_2,\ \tilde{a}_3-\lambda_0 e_3,\ \tilde{b}_1,\tilde{b}_2)=3, \\ \tilde{a}_3-\lambda_0 e_3\neq 0, \end{cases}$$

где e_i обозначает i-й единичный вектор.

Пусть, для определенности, из столбцов $(\tilde{A}_1-\lambda_0 E_{1,\,n};\ \tilde{A}_2-\lambda_0 E_{2,\,n};\ \tilde{B})$ в данном случае можно составить следующую неособенную матрицу вида (2.6):

$$(\tilde{a}_1-\lambda_0 e_1,\ \tilde{b}_1,\ \tilde{a}_3-\lambda_0 e_3),$$

т. е.

$$|\tilde{a}_1-\lambda_0 e_1,\ \tilde{b}_1,\ \tilde{a}_3-\lambda_0 e_3|\neq 0. \tag{2.7}$$

Выберем сейчас матрицу $\tilde{C}$ из соотношения

$$(\tilde{A}_1-\lambda_0 E_{1,\,3})+\tilde{B}\tilde{C}=(\tilde{a}_1-\lambda_0 e_1,\ \tilde{a}_2-\lambda_0 e_2+\tilde{b}_1), \tag{2.8}$$

где

$$A_1=(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2);\quad E_{1,3}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

(т. е., пользуясь условием (2.6), мы стараемся линейно зависимый от других столбцов матрицы $A-\lambda_0 E_3$ столбец $\tilde{a}_2-\lambda_0 e_2$ «блокировать» слагаемым b_1).

Элементы матрицы $\tilde{C}$, удовлетворяющей (2.8), можно выбрать следующим образом:

$$\tilde{c}_{11}=\tilde{c}_{21}=\tilde{c}_{22}=0;\ \tilde{c}_{12}=1.$$

При таком выборе $\tilde{C}$ будем иметь в силу известного свойства определителей и условия $|\tilde{A}-\lambda_0 E_3|=0$

$$|(A_1-\lambda_0 E_{1,\,3})+\tilde{B}\tilde{C};\ \tilde{A}_2-\lambda_0 E_{2,\,3}|=|\tilde{a}_1-\lambda_0 e_1,\ (\tilde{a}_2-\lambda_0 e_2)+\tilde{b}_1,\ \tilde{a}_3-\lambda_0 e_3|=$$
$$=|\tilde{a}_1-\lambda_0 e_1,\ \tilde{a}_2-\lambda_0 e_2,\ \tilde{a}_3-\lambda_0 e_3|+|\tilde{a}_1-\lambda_0 e_1,\ b_1,\tilde{a}_3-\lambda_0 e_3|=\tilde{a}_1-\lambda_0 e_1,\ b_1,\ \tilde{a}_3-\lambda_0 e_3|\neq 0,$$

т. е. λ_0 не является инвариантным спектральным значением системы (2.2) (а следовательно, и исходной системы).

Поскольку выполнение условий вида (2.1) для любого собственного значения A равносильно полной управляемости и наблюдаемости системы (1.1) [4], из теоремы 2 имеем

Следствие. Полностью управляемая и полностью наблюдаемая система с неполной информацией не может иметь собственных значений инвариантных относительно обратной связи по выходу.

Иными словами, неинвариантные собственные значения принадлежат полностью управляемой и полностью наблюдаемой части системы.

Поскольку согласно результатам работы [5] нарушение условий (2.1) равносильно выполнению условия

$$H \operatorname{adj} (A-\lambda_0 E_n) B=0, \tag{2.9}$$

где adj – обозначает присоединенную матрицу, изложенные выше результаты можно сформулировать еще и так.

Теорема 3. Для инвариантности собственного значения λ_0 матрицы A относительно обратной связи по выходу необходимо и достаточно выполнение условия (2.9).

Изложенные выше результаты можно естественным образом перенести для общих дифференциальных систем:

$$\begin{aligned} D(p)x(t)&=Bu(t),\\ y(t)&=Hx(t), \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $p \equiv d/dt$ – оператор дифференцирования, $D(p)$ – аналитическая $n\times n$-матрица, в классе управлений вида

$$u(t)=C(p)y(t)=C(p)Hx(t),$$

$C(p)$ – аналитическая матрица.

В этом случае условие (2.1) примет вид

$$\begin{cases} \operatorname{rank} (D(\lambda_0), B)=n,\\ \operatorname{rank} (D^T(\lambda_0), H^T)=n. \end{cases}$$

Заметим, наконец, что частным случаем системы (1.10) является система с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)&=Ax(t)+A_1x(t-\tau)+Bu(t),\\ y(t)&=Hx(t). \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асмыкович И. К., Габасов Р., Кириллова Ф. М., Марченко В. М.* Задачи управления конечномерными системами // АиТ. 1986. № 11.
2. *Асмыкович И. К.* Об инвариантности спектра линейных динамических систем // Вестн. БГУ. Сер. 1. 1975. № 2.
3. *Габелая А. Г.* Спектральная инвариантность линейных систем с неполной информацией и задачи модального управления и стабилизаций // Сообщ. АН ГССР. 1980. 99. № 2.
4. *Габелая А. Г., Иваненко В. И., Одарич О. Н.* Стабилизируемость линейных автономных систем с неполной информацией // Адаптивные системы автоматического управления. Киев: ИК АН УССР, 1974.
5. *Patel R. V.* On bloking zeros in linear multivariable systems. I. E. E. E. // Transact. Automat. Control. 1986. AC-31. № 3.

Тбилиси

Поступила в редакцию
23.I.1990

УДК 62-50

Г. А. ЧХЕИДЗЕ

СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ УПРУГИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Предложена методика определения структуры и расчета параметров алгоритмов управления механическими системами с упругими передачами движения. Алгоритмы строятся по схеме управления ускорениями, благодаря чему в системах реализуются свойства адаптивности и высокой динамической точности.

Рассмотрим управляемую механическую систему с упругой передачей движения. Математическая модель системы представлена структурной схемой (рис. 1). Здесь используются общепринятые обозначения [1]. Структурной схеме модели соответствует передаточная функция

$$W_0(p)=\frac{k}{p(p+\omega_1)(p+\omega_2)(p^2+2\zeta\omega_3 p+\omega_3{}^2)}, \tag{1}$$

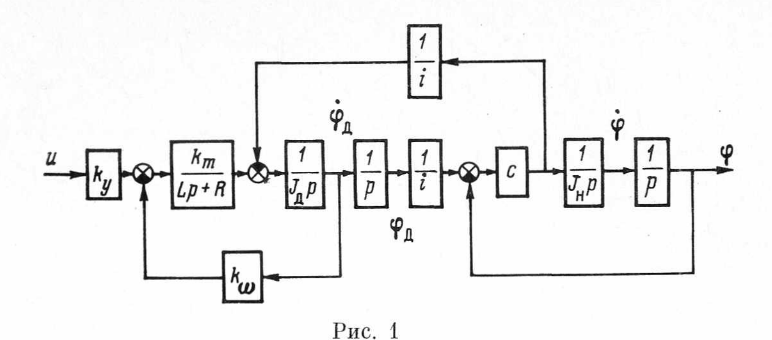


Рис. 1

где ω_s — частоты собственных колебаний управляемой системы; ζ — коэффициент демпфирования; k — коэффициент усиления. Как правило, $\omega_1<\omega_2<\omega_3$. Частота ω_1 определяется электромеханическими параметрами k_m, k_ω, $J_н$, $J_д$, i, а ω_2 — электрической постоянной времени $\tau_э=L/R$. Частота собственных колебаний подсистемы, включающей упругую механическую передачу, определяется значениями $J_д$, $J_н$, c, i.

Для применяемых конструкционных материалов $\zeta\ll 1$. Вследствие этого на частотах, близких к ω_3, могут возникать резонансные колебания. Если наряду с этим момент инерции нагрузки изменяется в широких пределах, то обеспечение высокой динамической точности системы в сочетании с реализацией назначенного характера переходного процесса с помощью традиционных средств коррекции оказывается труднодостижимым. В статье рассматривается новый подход к решению задачи синтеза, основанный на применении алгоритмов управления по ускорению.

Для удобства дальнейшего изложения запишем дифференциальное уравнение, соответствующее передаточной функции (1). Оно имеет вид

$$\frac{d^5\varphi(t)}{dt^5}+\sum_{s=0}^{4}a_s\varphi^{(s)}(t)=ku. \tag{2}$$

Коэффициенты a_s выражаются через параметры передаточной функции, при этом $a_0=0$. Пусть уравнение

$$\dddot{\varphi}^*(t)+\gamma_2\ddot{\varphi}^*(t)+\gamma_1\dot{\varphi}^*(t)+\gamma_0\varphi^*(t)=\beta_2\ddot{\varphi}_{вх}(t)+\beta_1\dot{\varphi}_{вх}(t)+\beta_0\varphi_{вх}(t) \tag{3}$$

описывает движение эталонной системы, динамика которой соответствует требованиям технического задания на проектирование. Синтезируем такой алгоритм управления $u=u(\varphi, \dot{\varphi}, \varphi_{вх})$, при котором величина $\max|\varphi^*(t)-\varphi(t)|$ не превышает допустимое значение.

Искомый алгоритм будем строить на основе дифференциального закона управления второго порядка

$$\tau\ddot{u}+\dot{u}=\varkappa(\varepsilon^*-\ddot{\varphi}), \tag{4}$$

где $\varepsilon^*=\ddot{\varphi}^*$ — требуемое значение ускорения управляемой переменной, которое соответствует эталонному процессу. Числовые значения параметров τ, $\varkappa$ подлежат определению. Уравнение (4) необходимо дополнить соотношениями для вычисления ε^*. В результате будем иметь уравнения алгоритма

$$\dot{u}=\frac{\varkappa}{\tau}\left[\int_0^t\varepsilon^*dt-\dot{\varphi}\right]-\frac{1}{\tau}u,\quad \varepsilon^*=\int_0^t\varphi_1\,dt+\beta_1\varphi_{вх}+\beta_2\dot{\varphi}_{вх}-\gamma_2\dot{\varphi},\quad \varphi_1=\beta_0\varphi_{вх}-\gamma_0\varphi-\gamma_1\dot{\varphi}. \tag{5}$$

Два последние уравнения в (5) получены интегрированием обеих частей (3) при условии, что $\varphi^*(t)=\varphi(t)$, $\dot{\varphi}^*(t)=\dot{\varphi}(t)$. Принято, что начальные значения соответствующих переменных равны нулю. Отметим, что аппаратная или алгоритмическая реализация алгоритма (5) не связана с необходимостью измерения ускорения управляемой координаты. Для вычисления управляющей функции достаточно иметь информацию об управляемой координате $\varphi(t)$ и скорости ее изменения $\dot{\varphi}(t)$.

Получим теперь расчетные формулы для параметров τ, $\varkappa$ алгоритма управления. Значения τ, $\varkappa$ должны быть такими, чтобы замкнутая система обладала требуемой динамической точностью. В [2] показано, что системы, управляемые по ускорению, обладают замечательными асимптотическими свойствами: при неограниченном увеличении усиления контура ускорения может быть достигнута сколь угодно высокая степень приближения выходной переменной системы к эталонному процессу, т. е. $\varphi(t)\to\varphi^*(t)$. Достаточная для практических приложений степень приближения $\varphi(t)\to\to\varphi^*(t)$ реализуется при конечных и весьма умеренных значениях коэффициента

усиления в контуре ускорения. В рассматриваемой задаче таким коэффициентом является $\varkappa$. Исследованиями установлено, что для обеспечения высокой динамической точности необходимо выполнить условия

$$\frac{1}{\tau} \approx \omega_3, \quad \frac{1}{\tau_\varepsilon} \geqslant (3-5)\,\omega_c^*, \tag{6}$$

где τ_ε — постоянная времени контура ускорения; ω_c^* — частота среза, соответствующая эталонной системе. Выполнение первого соотношения (6) позволяет увеличить запас устойчивости и, следовательно, дает возможность увеличить коэффициент усиления $\varkappa$. Смысл второго соотношения (6) заключается в том, что быстродействие контура ускорения должно быть в 3—5 раз выше быстродействия эталонной модели. Это соотношение мы используем для определения величины $\varkappa$. С этой целью найдем формулу для постоянной времени τ_ε. Исходим из того, что на частотах, близких к ω_c^*, управляемый объект можно с большой степенью точности описать дифференциальными уравнениями

$$a_2\ddot{\varphi}(t)+a_1\dot{\varphi}(t)=ku, \quad \dot{u}(t)=\varkappa(\varepsilon^*-\ddot{\varphi}). \tag{7}$$

Исключая в (7) управляющую функцию, получим уравнение, описывающее процесс в контуре ускорения:

$$a_2\frac{d\varepsilon}{dt}+(a_1+k\varkappa)\,\varepsilon=k\varkappa\varepsilon^*. \tag{8}$$

$$(\varepsilon=\ddot{\varphi})$$

Из (8) следует, что постоянная времени $\tau_\varepsilon=a_2/(a_1+k\varkappa)$. Таким образом, с учетом (6) находим расчетное соотношение для коэффициента усиления контура ускорения:

$$\varkappa \geqslant (3-5)\,a_2\omega_c^*-a_1/k. \tag{9}$$

По изложенной методике выполнен синтез алгоритма управления движением упругой системы, параметры которой имеют следующие значения:

$$k_у=5.4,\ k_m=0.043\ \text{Н·м·А}^{-1},\ J_н=100\ \text{кг·м}^2, \tag{10}$$
$$L=10^{-3}\ \text{Гн},\ k_\omega=0.073\ \text{В·с·рад}^{-1},\ i=100,\ k=1.7\cdot 10^7,$$
$$R=0.10\ \text{м},\ J_д=2.94\cdot 10^{-4}\ \text{кг·м}^2,\ c=3\cdot 10^5\ \text{Н·м·рад}^{-1}.$$

Этим значениям соответствуют: $\omega_1 \approx 2.3$ с$^{-1}$, $\omega_2 \approx 91$ с$^{-1}$, $\omega_3 \approx 335$ с$^{-1}$, $\zeta=0{,}01$. Расчет параметров алгоритма выполнялся из условия, чтобы динамика проектируемой системы соответствовала динамике эталонной модели (3), у которой $\gamma_0=\beta_0=1316$, $\gamma_1=200.66$, $\gamma_2=31.34$, $\beta_1=199.34$, $\beta_2=30{,}2$. Частота $\omega_c^*=27$ с$^{-1}$. Для указанных значений параметров в соответствии с изложенными рекомендациями находим $\tau=0.003$, $\varkappa=50$.

С помощью математического моделирования можно убедиться, что динамическая точность системы характеризуется величиной ошибки, не превышающей $0.3\cdot 10^{-2}$ рад, что соответствует заданию на проектирование. Существенно при этом, что высокие динамические свойства системы сохраняются при изменении момента инерции нагрузки в несколько раз.

Проектирование систем, обладающих высокой динамической точностью слежения за эталонной моделью, оказывается возможным путем сочетания алгоритмов управления по ускорениям с алгоритмами компенсационного типа. Рассмотрим эти вопросы применительно к моделям (2), (3). Определим управляющую функцию с помощью уравнений

$$\dot{u}_1=\frac{\varkappa}{\tau}\left[\int_0^t \varepsilon^* dt+\dot{\varphi}\right]-\frac{1}{\tau}u_1, \quad u_2=\frac{1}{k}[a_2\varphi_2+(a_1+a_2\beta_2)\,\dot{\varphi}],$$
$$\varphi_2=\int_0^t \varphi_1\,dt+\beta_1\varphi_{вх}-\gamma_2\dot{\varphi}, \quad \varepsilon^*=\varphi_2+\beta_2\dot{\varphi}_{вх}, \quad \varphi_1=\beta_0\varphi_{вх}-\gamma_0\varphi-\gamma_1\dot{\varphi}, \tag{11}$$
$$u=u_1+u_2.$$

Составляющая u_1 вычисляется по уравнениям, которые в точности соответствуют алгоритму управления по ускорению. Дополнительная составляющая u_2 осуществляет приближенную компенсацию слагаемых $a_1\dot{\varphi}$, $a_2\ddot{\varphi}$ в уравнении движения объекта. Действительно, поскольку управление по ускорению с высокой точностью обеспечивает выполнение приближенных равенств $\ddot{\varphi}\approx\varphi^*$, $\dot{\varphi}\approx\dot{\varphi}_{вх}$, то оказывается справедли-

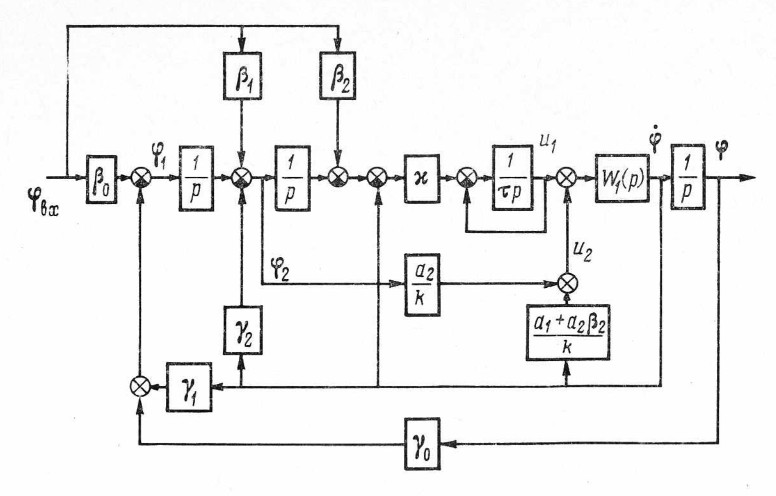


Рис. 2

вым соотношение $\varphi_2 \approx \ddot{\varphi} - \beta_2\dot{\varphi}$. Поэтому

$$u_2 = \frac{1}{k}[a_2\varphi_2 + (a_1+a_2\beta_2)\dot{\varphi}] \approx \frac{1}{k}(a_2\ddot{\varphi}+a_1\dot{\varphi}).$$

Структурная схема замкнутой системы с алгоритмом управления (11) представлена на рис. 2. Здесь $W_1(p)$ — передаточная функция по угловой скорости.

Можно показать, что наличие компенсирующего сигнала u_2 приводит к увеличению коэффициента усиления в контуре ускорения в области низких частот. Так, интегральная квадратичная оценка отклонения $\varphi(t) - \varphi^*(t)$ для исследуемой системы с параметрами (10), управляемой комбинированным алгоритмом (11), более чем на порядок меньше такой же оценки для системы с алгоритмом (5).

Таким образом, применение алгоритмов управления по ускорениям в сочетании с частичной компенсацией модели объекта позволяет реализовать в системе высокую динамическую точность и одновременно обеспечить строгое воспроизведение переходного процесса, формируемого эталонной моделью. С помощью традиционных корректирующих схем аналогичные характеристики недостижимы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кулешов В. С., Лакота Н. А.* Динамика систем управления манипуляторами. М.: Энергия, 1971.
2. *Крутько П. Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. М.: Наука, 1988.

Москва

Поступила в редакцию 2.VII.1990

УДК 62-50:512

Л. Н. ВОЛГИН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕМИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОГО ДИСКРЕТНОГО ОБЪЕКТА

Обобщается на случай неминимально-фазового объекта один важный результат теории оптимального дискретного управления, полученный Е. Д. Якубович; с помощью π-исчисления решена задача оптимального управления дискретным минимально-фазовым объектом с запаздыванием по критерию минимакса модуля управляемой координаты.

Рассмотрим дискретный объект управнения, описываемый операторным соотношением

$$q(z)\,y_i = z^{d_1}p(z)\,u_i + \xi_i, \tag{1}$$

где y_i, u_i и ξ_i — значения соответственно управляемой координаты, управляющего и возмущающего воздействий в момент дискретного времени i, $p(z)$ и $q(z)$ — полино-

мы от оператора запаздывания z $(zx_i=x_{i-1})$ вида

$$p(z)=p_0+\ldots+p_m z^m,\quad q(z)=q_0+\ldots+q_n z^n, \tag{2}$$

d_1 — запаздывание в управлении.

Ищется регулятор с дискретной передаточной функцией $w(z)$, описываемый операторным соотношением

$$u_i=-z^{d_2}w(z)\,y_i, \tag{3}$$

где d_2 — запаздывание в измерении. Относительно возмущающего воздействия предполагается, что его значения ограничены

$$|\xi_i|\leqslant r. \tag{4}$$

Критерием оптимальности является максимум модуля управляемой координаты при $i\to\infty$ [1]

$$I=\lim_{i\to\infty}\max_{(\xi_i)}|y_i|\to\min. \tag{5}$$

Подставляя (3) в (1), получим передаточную функцию замкнутой системы

$$y_i=h(z)\,\xi_i,\quad h=\frac{1}{q+z^d pw}, \tag{6}$$

где $d=d_1+d_2$ — полное запаздывание в контуре.

Предполагая объект в общем случае неминимально-фазовым, произведем факторизацию полинома $p(z)$ относительно круга $|z|=1$

$$p=p^+p^-. \tag{7}$$

Здесь все корни полинома p^+ расположены в области $|z|>1$, а все корни p^- — в области $|z|\leqslant1$.

Теорема. Передаточная функция оптимального регулятора равна

$$w=\frac{\theta}{p^+\pi} \tag{8}$$

где θ и π — полиномы, входящие в минимальное решение правильного π-уравнения [2]

$$z^d p^- \theta+q\pi=1. \tag{9}$$

Доказательство. Подставляя (8) в (6) и учитывая (7), получим

$$h=\frac{\pi}{z^d p^-\theta+q\pi}.$$

С учетом (9) эта передаточная функция принимает вид $h=\pi$. Следовательно

$$y_i=\pi\xi_i,\quad y_i=\sum_{k=0}^{s}\pi_k\xi_{i-k}, \tag{10}$$

где $s=\|\pi\|$ — степень полинома π, равная

$$s=\|\pi\|=\|p^-\|+d-1.$$

Из (10) следует, что

$$|y_i|\leqslant\sum_{k=0}^{s}|\pi_k|\,|\xi_{i-k}|.$$

С учетом (4) имеем

$$|y_i|\leqslant r\sum_{k=0}^{s}|\pi_k|.$$

Согласно доказанному в [1], минимальное значение функционала (5) равно

$$I^*=r\sum_{k=0}^{s}|\pi_k|.$$

П р и м е р. Рассмотрим дискретный объект с передаточной функцией

$$g(z)=\frac{z(p_0+p_1z)}{1+q_1z+q_2z^2}.$$

Запаздывание в управлении $d_1=1$.

1. Пусть объект минимально-фазовый: $|p_0|>|p_1|$, $p=p^+$, $p^-=1$. Для запаздывания в измерении рассмотрим два случая: $d_2=0$; 1. Имеем $d=d_1+d_2=1$; 2.

Составляем π-уравнение (9): $z^d\theta+(1+q_1z+q_2z^2)\pi=1$. Его минимальное решение $d=1$: $\pi_0=1$; $\theta_0=-q_1$; $\theta_1=-q_2$;

$$w_2=\frac{-q_1-q_2z}{p_0+p_1z}.$$

$d=2$: $\pi_0=1$; $\pi_1=-q_1$; $\theta_0=-q_2+q_1^2$; $\theta_1=q_1q_2$;

$$w=\frac{q_1^2-q_2+q_1q_2z}{(p_0+p_1z)(1-q_1z)},$$

что совпадает с результатами [1].

2. Пусть объект неминимально-фазовый: $|p_1|\geqslant|p_0|$, $p=p^-$, $p^+=1$. Составляем π-уравнение (9)

$$z^d(p_0+p_1z)\theta+(1+q_1z+q_2z^2)\pi=1.$$

Его минимальное решение

$$d=1:\quad \pi_0=1;\quad \pi_1=\frac{p_1(p_0q_2-p_1q_1)}{p_0(p_0q_2-p_1q_1)+p_1^2};$$

$$\theta_0=\frac{q_1(p_1q_1-p_0q_2)-p_1q_2}{p_0(p_0q_2-p_1q_1)+p_1^2};\quad \theta_1=\frac{q_2(p_1q_1-p_0q_2)}{p_0(p_0q_2-p_1q_1)+p_1^2};$$

$$w=\frac{\theta_0+\theta_1z}{\pi_0+\pi_1z}.$$

$$d=2:\quad \pi_0=1;\quad \pi_1=-q_1;\quad \pi_2=\frac{p_1q_1(p_0q_2-p_1q_1)}{p_0(p_0q_2-p_1q_1)+p_1^2};$$

$$\theta_0=\frac{q_1^2(p_0q_2-p_1q_1)+p_1q_1q_2}{p_0(p_0q_2-p_1q_1)+p_1^2};\quad \theta_1=\frac{q_1q_2(p_0q_2-p_1q_1)}{p_0(p_0q_2-p_1q_1)+p_1^2};$$

$$w=\frac{\theta_0+\theta_1z}{\pi_0+\pi_1z+\pi_2z^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Якубович Е. Д.* Решение одной задачи оптимального управления дискретной линейной системой // АиТ. 1975. № 9.
2. *Волгин Л. Н.* Оптимальное дискретное управление динамическими системами. М.: Наука, 1986.

Москва

Поступила в редакцию 2.X.1987

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

АННОТАЦИИ СТАТЕЙ, ДЕПОНИРОВАННЫХ В ВИНИТИ

УДК 621.9.06-529

А. А. ЕРЕСЬКО, М. Н. ЗАПРУДОВ

АЛГОРИТМ ПЛАНИРОВАНИЯ ОПОРНЫХ ТРАЕКТОРИЙ АРМИРУЮЩЕГО МАНИПУЛЯТОРА

Статья посвящена алгоритмам планирования опорных траекторий армирующего манипулятора с различными кинематическими схемами. Выведены соотношения для скоростей изменения обобщенных координат раскладывающего механизма. Составлены алгоритмы расчета опорных траекторий для различных исходных требований к характеру протекания намоточного процесса. Рассмотрен также алгоритм решения прямой задачи кинематики, предназначенный для оценки точности воспроизведения заданной траектории витка при отклонениях кинематических параметров оборудования и оправки от номинальных. Приведен пример численного решения системы уравнений, составляющей математическую модель кинематики намоточного процесса.

Хотьково

Поступила в редакцию
3.I.1990

Статья полностью депонирована в ВИНИТИ за № 1383-В90 от 13 марта 1990 г.

УДК 62–55:62-181.4

Р. Х. АШУРБЕКОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМОВ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ САМОНАСТРАИВАЮЩИХСЯ РЕГУЛЯТОРОВ

Рассмотрены вопросы исследования алгоритмов оценивания параметров самонастраивающихся регуляторов. Показаны недостатки оценивателя параметров по методу наименьших квадратов, такие как дрейф и «взрыв» (резкое изменение) параметров регулятора в процессе управления, а также способы их устранения. Приведены результаты исследования самонастраивающегося регулятора с различными оценивателями параметров на примере управления диаметром вытягиваемого волоконно-оптического световода в процессе вытяжки, а также исчерпывающие материалы о влиянии на качество функционирования самонастраивающегося регулятора различных алгоритмов оценивания.

Москва

Поступила в редакцию
14.XII.1989

Статья полностью депонирована в ВИНИТИ за № 1395-В90 от 13 марта 1990 г.

УДК 621.391.272

Р. Т. ЯКУПОВ

АНАЛОГО-ЦИФРОВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ФИЛЬТРА КАЛМАНА — БЬЮСИ

Рассматривается линейная динамическая система

$$dx = A(t)x\,dt + B(t)\,dw(t),\ x(t_0) = x_0;$$
$$dz = H(t)x\,dt + G(t)\,dv(t),\ z(t_0) = 0,$$

где z – векторный наблюдаемый процесс; векторы x_0, $w(t)$, $v(s)$ взаимно независимы для всех t, $s \geqslant t_0$; x_0 имеет математическое ожидание m_0 и ковариационную матрицу P_0. Компоненты векторов w и v – независимые стандартные винеровские процессы.

Показано, что оптимальная оценка фильтрации x в фиксированных точках $t_k (k=1, 2, \dots)$ по наблюдениям z на интервале $[t_0, t_k]$ определяется формулой

$$\hat{x}(t_k) = [I - P(t_k)L(t_k)]\Phi(t_k)\hat{x}(t_{k-1}) + P(t_k)\chi(t_k) + \varkappa(t_k),\ \hat{x}(t_0) = m_0;$$
$$P(t_k) = \Gamma(t_k)[I + L(t_k)\Gamma(t_k)]^{-1},\ P(t_0) = P_0;$$
$$\Gamma(t_k) = \Phi(t_k)P(t_{k-1})\Phi^T(t_k) + U(t_k),$$

где Φ, L, U удовлетворяют линейным матричным дифференциальным уравнениям; векторы $\varkappa(t_k)$, $\chi(t_k)$, определяемые из стохастических дифференциальных уравнений, зависящих от z, являются (наряду с $x(t_{k-1})$) достаточными статистиками в рассматриваемой задаче фильтрации.

Получены также субоптимальные алгоритмы оценивания состояний в дискретных точках. Предложенные алгоритмы отличаются от стандартного фильтра Калмана – Бьюси тем, что в ряде случаев характеризуются меньшим числом аналоговых операций, что во многих практических приложениях облегчает задачу создания устройства обработки наблюдений.

Томск

Поступила в редакцию 14.XII.1989

Статья полностью депонирована в ВИНИТИ за № 1392-В90 от 13 марта 1990 г.

ТЕХНИЧЕСКАЯ
КИБЕРНЕТИКА
№ 1 · 1991

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ за 1990 год

	№	Стр.
Авербах И. Л. Адаптивный метод оптимизации двуэхтапных стохастических систем с дискретными переменными	1	162
Адамчук И. П. Система автоматизированного проектирования и интерпретации экспертных алгоритмов и программно-логического управления	1	178
Акимов С. И. Упорядочение обобщающих множеств в структурном распознавании образов	5	59
Албу В. А., Хорошевский В. Ф. КОГР – система когнитивной графики. Разработка, реализация и применение	5	105
Александров В. М., Санина С. Б. Оптимизация плана проведения натурных испытаний и математического моделирования системы с целью настройки ее на экстремальный режим	1	108
Александров Е. Е. Параметрическая оптимизация регулируемых динамических систем с помощью функций Ляпунова	3	44
Алиев Ф. А., Бордюк Б. А., Ларин В. Б. Факторизация полиномиальных матриц и сепарация дробно-рациональных матриц	2	49
Альтман А. Ю., Ломакина Л. С., Сагунов В. Г. Оптимизация алгоритмов поиска дефектов с учетом требований глубины диагностирования. II.	3	221
Ашурбеков Р. Х., Пузырев В. А. Управление технологическим процессом вытяжки волоконно-оптических световодов	3	218
Бабич О. А. Новая форма решения линейно-квадратичной задачи в теории оптимального управления	2	33
Базылев В. Ю. Резолюционный доказатель для S_4	5	83
Байда С. И., Белицкий Д. С., Кудрявцев В. В., Шутенко В. И. Нелинейная коррекция динамических характеристик рулевых приводов второй ступени ракеты-носителя «Энергия»	4	128
Байда С. И., Кудрявцев В. В., Черток Б. Е., Шутенко В. И. Цифровой электрогидравлический привод в системе управления ракеты-носителя «Энергия»	1	183
Балашова Н. Н., Баранков П. А., Маслов В. Д., Пивоваров М. Л., Почукаев В. Н., Синцова Л. Н., Тюрмина Л. О., Шарова В. А. Метод геомагнитной навигации околоземных летательных аппаратов	3	128
Баныкин И. Ф. Определение параметров математических моделей самолета методом дискретно-непрерывной идентификации	2	80
Барабанов Н. Е. Критерий устойчивости неавтономных линейных систем на основе построения функции Ляпунова с переменными коэффициентами	3	202
Баранков П. А. см. **Балашова Н. Н.**		
Баришполец В. А., Кобзарь С. А. Алгоритм анализа модели со стохастической структурой и случайной продолжительностью работ с помощью численного метода	1	147
Барский В. Е. Формулирование устойчивых на конечном интервале времени терминальных систем	2	23
Белицкий Д. С. см. **Байда С. И.**		
Белов Ю. А., Шафранский С. В. Декомпозиция задачи выбора	2	173
Белозеров В. Е. Нелинейные модели в задаче синтеза статической обратной связи по выходу для линейных систем автоматического управления	4	3
Берштейн Л. С., Казупеев В. М., Коровин С. Я., Мелихов А. Н. Параллельный процессор нечеткого вывода для ситуационных экспертных систем	5	181
Битюцких В. Т. Минимаксная задачам распределения средств нападения и обороны	4	31

	№	Стр.
Блюмин С. Л. Преобразования моделей мультиразмерностных систем . .	3	220
Богатырев В. А., Щеглов А. Ю. Метод динамического разделения канала в пространстве – новый способ множественного доступа	3	184
Богуславский И. А., Владимиров И. Г. Адаптивное оценивание вектора сдвига	4	47
Болотник Н. Н., Черноусько Ф. Л. Оптимизация управления манипуляционными роботами	1	189
Бордецкий А. Б., Маслов В. Г., Хавронина М. А. Декомпозиция пространства поиска в экспертных системах с количественными базами знаний	6	219
Бордюк Б. А. см. Алиев Ф. А.		
Борисенко И. И. Синтез управлений многомерной стохастической системой на основе декомпозиции , ...	6	185
Борисов А. Н., Федоров И. П. Формирование технических решений на основе экспертных знаний	5	154
Борнева Ренета П. Представление изменяющихся объектов средствами языка Модула-2	5	26
Борцайкин С. М., Копачев С. Д. Фундаментальное решение системы уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. II. Система двух уравнений с постоянными коэффициентами	3	222
Борцайкин С. М. Фундаментальное решение системы уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова. I. Представление континуальным интегралом с экспоненциальным матричным ядром	3	217
Брыкалов С. А. Стационарные распределения температуры в системе с непрерывной обратной связью и управлением	2	162
Бурмистенко В. М., Кушнир В. Н., Полищук В. М., Хиленко В. В. Адекватное упрощение линейных моделей при решении задач оптимального управления	6	233
Владимиров И. Г. см. Богуславский И. А.		
Владимиров Л. В. Системы автоматического экспонирования в рентгеновской диагностике с регламентированным временем снимка . .	3	200
Волгин Л. Н. Ответ на письмо В. Б. Ларина	3	214
Волков В. Л., Гущин О. Г., Пакшин П. В. Синтез алгоритмов оценивания и управления с учетом характера вычислительной среды . . .	4	78
Волкович В. Л., Коленов Г. В. Метод распределенного решения взаимосвязанных оптимизационных задач	6	28
Володин В. Д., Евдокименков В. Н., Карлов В. И., Красильщиков М. Н. Вероятностный анализ и синтез управления движением воздушно-космического ЛА на основе методов оптимального планирования экспериментов	4	136
Воронин А. Н. Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах управления	4	38
Гачинский Э. Е., Матвеев С. В., Трифонов А. Н., Черкашин М. Ю. Об одной задаче поиска источников излучения	4	99
Гендлер М. Б. Реализация конечных автоматов с произвольным числом входов и выходов потоковыми сетями импульсного типа	6	156
Гиоргадзе А. Х., Макаревич Л. В., Матевосян А. А. Логические аспекты конструирования клеточных оптических процессоров	1	167
Голубев Ю. Ф., Дегтярева Е. В., Хайруллин Р. З. Метод последовательной линеаризации в задаче поиска оптимального шагового цикла шагающего аппарата	2	214
Горбачев Н. В., Сафонов А. В., Шухов А. Г. Синтез и оптимизация алгоритмов управления на основе концепции обратных задач . . .	2	3
Гордиенко Е. К., Захаров В. Н., Кириллов В. Ю., Миронов А. Ю. Полнота и эффективность навигационных операций в децентрализованных интеллектуальных системах	5	212
Гордон А. Р., Лапшун Р. А. Предъявления для задач выбора в играх, групповых решениях и задачах векторной оптимизации	3	224
Горшков А. Ф., Гуров А. К. Методика синтеза алгоритмов управления гибкими производственными модулями роботизированных комплексов	6	225
Гринберг С. Я., Яхно Т. М. Решение задач технической диагностики с использованием оболочки ДИ×ГЕН	5	147
Гуров А. К. см. Горшков А. Ф.		
Гусев М. И. Задача распределения ресурсов при слабых связях между подсистемами	6	58
Гущенко В. В. Функционально-декомпозиционное представление сложных технических систем	2	184
Гущин О. Г. см. Волков В. Л.		

	№	Стр.
Гущинский Н. Н., Левин Г. М., Танаев В. С. Параметрическая декомпозиция задач минимизации сложных функций на параметризованных путях орграфов	6	125
Данилов В. В., Угрюмов В. Е., Уманцев П. Г. Использование экспертных знаний при поиске дефектов вычислительных систем	2	166
Дегтярева Е. В. см. **Голубев Ю. Ф.**		
Демченко А. И., Пельцвергер Б. В., Хавронин О. В. Синтез структур транспортных сетей в условиях неопределенности исходной информации на основе декомпозиционного подхода	3	18
Домбровский В. В., Решетникова Г. Н., Смагин В. И. Синтез управлений по критерию обобщенной работы с прогнозирующей моделью пониженной размерности	3	221
Дулин С. К. Знаковая интерпретация сходства для согласованности множества объектов	5	22
Думбадзе Л. Г., Евдокимов М. В., Тизик А. П., Цурков В. И. Пакет прикладных программ для приближенного решения мономерной задачи о ранце (ранец-диалог)	6	200
Евдокименков В. Н. см. **Володин В. Д.**		
Евдокимов М. В. см. **Думбадзе Л. Г.**		
Еремеев А. П. Параллельная модель для продукционной системы табличного типа	5	171
Еремин Г. С. Алгоритм перебора групп элементов	4	221
Ефимов Е. В., Казаков И. Е. Оптимальная фильтрация в динамических системах случайной структуры с управляемым от индикатора измерителем	1	85
Жожикашвили А. В., Стефанюк В. А. Программируемая оболочка экспертной системы ЗНАТОК и проблемы ее теоретико-категорного описания	5	134
Жуков А. А., Фурасов В. Д. Эллипсоидная аппроксимация и оценивание состояний дискретных систем	2	121
Жук С. Я. Применение двухфункциональных решающих правил для оптимизации дискретных систем случайной структуры	2	130
Завалищин С. Т., Ревенко В. В. Расширение нерегулярных задач оптимального управления механическими системами	3	179
Зарипов Р. Х. Машинное сочинение песенных мелодий	5	119
Захаров В. Н. см. **Гордиенко Е. К.**		
Золотарев Ю. Г., Зотов М. Г. Индикатор совместимости исходных данных в управлении Винера – Хопфа	3	197
Зотов М. Г. см. **Золотарев Ю. Г.**		
Зубов А. Г., Петров А. И. Оценивание в нелинейных стохастических системах при внезапных изменениях структуры и координат состояния	4	64
Зубов Н. Е. Алгоритмическое обеспечение автоматического режима орбитальной ориентации космического аппарата	2	193
Зубов Н. Е. Алгоритм автоматического управления вращательным и поступательным пространственным движениями космического аппарата в процессе сближения	3	166
Ильин В. А. Оптимизационный подход к задаче планирования траекторий подвижных роботов в условиях неполной информации о расположении препятствий	3	220
Ильин О. Ю. Конструирование алгоритмов управления групповым полетом вертолетов при совместной транспортировке моногруза на внешней подвеске	4	150
Ильясов Б. Г., Кабальнов Ю. С., Колушов В. В. К построению областей устойчивости МСАУ в плоскости АФХ ее сепаратных подсистем	1	18
Илюшин В. Б. Идентификация по абсолютно оптимальному критерию	3	218
Иноземцев В. Г., Тибилов Т. А. Регулирование межпоездных интервалов при наличии возмущений	4	156
Кабальнов Ю. С. см. **Ильясов Б. Г.**		
Казаков И. Е. см. **Ефимов Е. В.**		

	№	Стр.
Казупеев В. М. см. **Берштейн Л. С.**		
Капитонов Ю. А., Палагин Ю. И., Шалыгин А. С. Ядерные оценки многомерных плотностей распределения случайных полей	4	87
Карлов В. И. см. **Володин В. Д.**		
Карлов В. И. Совместная оптимизация процессов наблюдения и управления	6	192
Катулев А. Н., Перевозчиков А. Г. Определение весовых функций нестационарных импульсных систем по минимаксному критерию	1	37
Кацман В. Е. Теория схем разбиения	3	28
Качанов Б. О. Многорежимное оценивание и идентификация методом максимума средней апостериорной вероятности	3	72
Кейс И. А. Синтез управления системой Гамильтона в экспоненциальной реализации заданного движения на принципе декомпозиции	6	95
Ким Ю. В. Об одном подходе к субоптимальной фильтрации в прикладных задачах обработки информации	1	92
Кириллов В. Ю. см. **Гордиенко Е. К.**		
Клопотек Мечислав А. Восстановление движущихся трехмерных объектов	5	86
Кобзарь С. А. см. **Баришполец В. А.**		
Ковтун В. С., Митрикас В. В., Платонов В. Н., Ревнивых С. Г., Суханов Н. А. Математическое обеспечение проведения экспериментов при управлении ориентацией космического астрофизического модуля «Гамма»	3	144
Козлов М. В., Рогожин В. С., Ушаков И. А. Диалоговая система для решения задач расчета, оптимизации статистической оценки надежности технических систем	4	165
Колегов Г. А., Мельников Е. К. Долгосрочное планирование маневров формирования рабочих орбит космических комплексов	3	158
Коленов Г. В. см. **Волкович В. Л.**		
Колмановский В. Б., Носов В. Р. Об управлении одной билинейной системой	2	60
Колногоров А. В. Об оценках минимаксного риска в стационарных средах	2	153
Кондратьев В. В. Декомпозиция, структуризация и анализ социально-экономических систем	6	205
Колобов М. Г. Адаптивное оценивание состояния динамической системы в условиях неопределенности	1	119
Колотилин Б. Б. Задача оптимального проектирования структуры иерархической системы распределенной обработки информации	1	140
Колушов В. В. см. **Ильясов Б. Г.**		
Копачев С. Д. см. **Борцайкин С. М.**		
Коровин С. К., Нерсисян А. Л., Нисензон Ю. Е. Управление по выходу линейными неопределенными объектами	1	67
Коровин С. Я. см. **Берштейн Л. С.**		
Кошкин Г. М., Рюмкин В. И. Асимптотические свойства ядерных оценок логарифмической производной плотности	3	223
Красильщиков М. Н. см. **Володин В. Д.**		
Красовский А. А. Гармоническая корреляционно-экстремальная навигация	4	115
Красовский А. А. Дуальная задача управления и идентификации в классе кусочно-линейных моделей	1	74
Крутько П. Д. Новые структуры адаптивных алгоритмов управления автоматических систем	1	3
Крысов Ю. А. Выработка и координация решений в некоторых процедурах параметрического анализа оптимизационных задач	6	43
Крысов Ю. А. О некоторых нелокальных свойствах функций оптимума	1	157
Крысов Ю. А. Оптимизация параметрических систем на базе агрегирования управлений	3	50
Кудинов Ю. И. Нечеткие системы управления	5	196
Кудрявцев В. В. см. **Байда С. И.**		
Кузьмин С. Л. К задаче о кратчайшем пути в ориентированном графе с произвольными длинами дуг	6	237
Кушнир В. Н. см. **Бурмистенко В. М.**		
Лабоцкий В. В., Сачок Г. А. Система автоматического управления электрохимическими процессами микроэлектроники	3	219
Лапшун Р. А. см. **Гордон А. Р.**		
Ларин В. Б. Замечания к обзору	4	224
Ларин В. Б. Оптимизация в H^2 и параметризация регуляторов в стандартной задаче синтеза [I]	4	17

	№	Стр.
Ларин В. Б. Письмо в редакцию по поводу статьи [I]	3	213
Ларин В. Б. см. **Алиев Ф. А.**		
Лебедев А. Л. Задачи идеального наблюдения некоторых классов дискретных систем	1	125
Левин Г. М. см. **Гущинский Н. Н.**		
Леонов В. А., Поплавский Б. К. Метод линейных преобразований идентификации динамических систем	2	73
Леонов В. Ю. Итеративное агрегирование в задачах оптимального управления	2	187
Ливанов Ю. В. Построение дерева исходов для анализа аварий и катастроф с использованием ПЭМП	6	178
Лисицын В. М., Обросов К. В., Пасечный Н. Н., Стефанов В. А. Алгоритм сегментации доплеровских лазерно-локационных изображений	2	203
Листровой С. В. Параллельный алгоритм для задачи о кратчайших маршрутах на графе	4	189
Литвинчев И. С. Использование структуры и оценок перекрестных связей в методе декомпозиции задач оптимального управления	6	104
Ломакина Л. С. см. **Альтман А. Ю.**		
Ломакина Л. С. Автоматизация проектирования контролепригодных систем	3	222
Ляпин Л. Н., Муромцев Ю. Л. Анализ и оперативный синтез оптимального в задаче двойного интегратора на множестве состояний функционирования	3	57
Макаревич Л. В. см. **Гиоргадзе А. Х.**		
Макеев С. П. Декомпозиция задачи вычисления функций от взаимодействующих нечетких переменных	5	207
Малышев В. В., Пакшин П. В. Прикладная теория стохастической устойчивости и оптимального стационарного управления (обзор) ч. I.	1	42
Малышев В. В., Пакшин П. В. Прикладная теория стохастической устойчивости и оптимального стационарного управления (обзор) ч. II.	2	97
Малышенко А. М. Определение индексов каузальности управляемых динамических систем	1	32
Маслов В. Г. см. **Бордецкий А. Б.**		
Маслов В. Д. см. **Балашова Н. Н.**		
Матвеев С. В. см. **Гачинский Э. Е.**		
Матевосян А. А. см. **Гиоргадзе А. Х.**		
Медницкий В. Г. Декомпозиция и итеративное агрегирование в задачах линейного программирования с блочно-треугольной или ступенчатой структурой ограничений	6	14
Мелихов А. Н. см. **Берштейн Л. С.**		
Мельников Е. К. см. **Колегов Г. А.**		
Миронов А. А. О вероятностных свойствах случайного графа с заданным набором степеней вершин	4	180
Миронов А. Ю. см. **Гордиенко Е. К.**		
Митрикас В. В. см. **Ковтун В. С.**		
Мищенко А. В. Устойчивость решений в задаче перераспределения транспортных средств в случае экстренного закрытия движения на участке метрополитена	3	23
Моисеев А. Г., Нараленков М. К. Дискретные квазиоптимальные алгоритмы оценивания непрерывных процессов с измеряемыми параметрами	2	91
Молокова О. С. Модель накопления и использования опыта в деятельности эксперта	5	164
Муромцев Ю. Л. см. **Ляпин Л. Н.**		
Мытус Л. Л. Методы и средства специфицирования программного обеспечения встроенных систем	5	46
Нараленков М. К. см. **Моисеев А. Г.**		
Нерсисян А. Л. см. **Коровин С. К.**		
Нисензон Ю. Е. см. **Коровин С. К.**		
Носов В. Р. см. **Колмановский В. Б.**		
Обросов К. В. см. **Лисицын В. М.**		
Осипов Г. С. Построение моделей предметных областей. Ч. I. Неоднородные семантические сети	5	32

	№	Стр.
Павловский Ю. Н. О двойственности в теории декомпозиции	6	3
Пакшин П. В. см. **Волков В. Л.**		
Пакшин П. В. см. **Малышев В. В.**		
Пакшин П. В. Устойчивость линейных систем со случайными параметрами и структурой	3	115
Палагин Ю. И. см. **Капитонов Ю. А.**		
Пасечный Н. Н. см. **Лисицын В. М.**		
Пахомов М. Г. Инженерный метод оценки выходных характеристик сложных стохастических систем на заданный высокий уровень вероятности	2	146
Пелевин В. Ю., Филимонов Р. П. Сравнение процедур фонетической сегментации речи по асимптотической эффективности	3	215
Пельцвергер Б. В. Приближенная декомпозиция и вопросы взаимодействия подсистем в сложных технических системах	6	83
Пельцвергер Б. В. см. **Демченко А. И.**		
Первозванский А. А. Декомпозиция и агрегирование в задачах оперативного управления дискретным производством	6	116
Перевозчиков А. Г. О задаче синтеза больших систем на базе универсальных модулей	4	174
Перевозчиков А. Г. см. **Катулев А. Н.**		
Перевозчиков А. Г., Снаксарев А. М. Об оптимизации поисковых деревьев в задачах структурного синтеза сложных технических систем	2	178
Петров А. И. см. **Зубов А. Г.**		
Пивоваров М. Л. см. **Балашова Н. Н.**		
Пинтов А. В. Экспертно-математическое моделирование нечетких систем	3	216
Пирумов Г. У. О параметрической оптимизации разгона-торможения руки манипулятора	3	65
Пиуновский А. Б. Задачи оптимального управления с бесконечным горизонтом	2	66
Платонов В. Н. см. **Ковтун В. С.**		
Покотило В. Г. К проблеме аппроксимации пересечения эллипсоидов	3	38
Полищук В. М. см. **Бурмистенко В. М.**		
Поморцев Л. А. Управление случайными блужданиями	6	169
Поплавский Б. К. см. **Леонов В. А.**		
Попов С. Н. Формализованная модель функционирования выемочно-транспортных систем горных предприятий	3	208
Потапенко Е. М. Минимизация размерности компенсатора при управлении колебательной системой	1	26
Почукаев В. Н. см. **Балашова Н. Н.**		
Пузырев В. А. см. **Ашурбеков Р. Х.**		
Решетникова Г. Н. см. **Домбровский В. В.**		
Ревенко В. В. см. **Завалищин С. Т.**		
Ревнивых С. Г. см. **Ковтун В. С.**		
Рогожин В. С. см. **Козлов М. В.**		
Рубан А. И. Непараметрическое оценивание информационной меры степени идентичности модели объекту	3	221
Рудельсон Л. Е. Организация поиска по нескольким ключам в базе данных, сортированных непосредственной расстановкой	5	71
Рюмкин В. И. см. **Кошкин Г. М.**		
Сагунов В. Г. см. **Альтман А. Ю.**		
Садомцев Ю. В. Статистическая регулируемость выхода линейных стационарных управляемых систем	2	15
Сакалаускас Э. И. Явный субоптимальный алгоритм идентификации нелинейных систем с распределенными параметрами	3	205
Санина С. Б. см. **Александров В. М.**		
Сафонов А. В. см. **Горбачев Н. В.**		
Сачок Г. А. см. **Лабоцкий В. В.**		
Сигал И. Х. Декомпозиционный подход к решению задачи коммивояжера большой размерности и некоторые его приложения	6	143
Силаев А. И. Истинный локальный максимум апостериорной вероятности в задаче идентификации-оценивания при недискретном распределении неопределенных параметров	3	92
Синцова Л. Н. см. **Балашова Н. Н.**		
Смагин В. И. см. **Домбровский В. В.**		
Снаксарев А. М. см. **Перевозчиков А. Г.**		

	№	Стр.
Соболев А. В., Черников Г. Н. Нечисловая обработка информации в научных исследованиях на системах с p-таблицей	5	191
Солдунов В. А. Модальные оценки множества достижимости линейной системы	4	25
Сотсков Ю. Н., Шахлевич Н. В. Адаптивный алгоритм минимизации общего времени обслуживания требований последовательными приборами	6	137
Стефанов В. А. см. **Лисицын В. М.**		
Стефанюк В. А. см. **Жожикашвили А. В.**		
Суханов Н. А. см. **Ковтун В. С.**		
Танаев В. С. см. **Гущинский Н. Н.**		
Тарасов В. Б. см. **Микишев В. В.**		
Тибилов Т. А. см. **Иноземцев В. Г.**		
Тизик А. П. см. **Думбадзе Л. Г.**		
Тренев Н. Н. Некоторые механизмы увязки локальных алгоритмов в распределенных системах	4	197
Трифонов А. Н. см. **Гачинский Э. Ф.**		
Тюрмина Л. О. см. **Балашова Н. Н.**		
Угрюмов В. Е. см. **Данилов В. В.**		
Уманцев П. Г. см. **Данилов В. В.**		
Ушаков А. В. Оценка качества процессов в линейных многомерных системах при внешнем конечномерном воздействии	3	216
Ушаков И. А. см. **Козлов М. В.**		
Федоров И. П. см. **Борисов А. Н.**		
Филимонов Р. П. см. **Пелевин В. Ю.**		
Фицнер Л. Н. Дуальное управление и вариационный принцип	4	216
Фоменко А. В. Синтез оптимального управления разрывными системами с использованием комбинированных полей экстремалей	3	193
Фролов А. Б., Яко Э. Алгоритмы распознавания частично упорядоченных объектов и их применение	5	95
Фурасов В. Д. см. **Жуков А. А.**		
Хавронина М. А. см. **Бордецкий А. Б.**		
Хавронин О. В. см. **Демченко А. И.**		
Хайруллин Р. З. см. **Голубев Ю. Ф.**		
Хиленко В. В. см. **Бурмистенко В. М.**		
Хорошевский В. Ф. см. **Албу В. А.**		
Хорошевский В. Ф., Щенников С. Ю. Инструментальная поддержка процессов приобретения знаний в системе ПИЭС	4	206
Цой Э. В., Юдин Д. Б. Прямая задача синтеза знаний в теории принятия решений	1	130
Цой Э. В., Юдин Д. Б. Расширенная прямая задача синтеза процедурных знаний	5	126
Цурков В. И. Декомпозиция в задачах управления большими системами с дискретными переменами	3	3
Цурков В. И. см. **Думбадзе Л. Г.**		
Цурков В. И., Шаповалов А. В. Двухуровневая методика в задачах управления дисперсными системами	2	156
Цурков В. И., Шаповалов А. В. О точечном управлении системой с распределенными параметрами	4	111
Черкашин М. Ю. см. **Гачинский Э. Е.**		
Черников Г. Н. см. **Соболев А. В.**		
Чернов Д. Э. Динамическое программирование. Замораживание переменных в методике сокращения вычислений	3	121
Черноусько Ф. Л. Декомпозиция и синтез управления в динамических системах	6	64
Черноусько Ф. Л. см. **Болотник Н. Н.**		
Черток Б. Е. см. **Байда С. И.**		
Чесноков С. В. Детерминированная двухзначная силлогистика	5	3

	№	Стр.
Шаламов А. С. Модель расходования и пополнения запасов в сложной системе с процессами регенерации первого и второго рода	2	138
Шаламов А. С. Система многоразового использования запасов с периодической политикой пополнения и случайным запаздыванием поставок	3	78
Шалыгин А. С. см. **Капитонов Ю. А.**		
Шаповалов А. В. см. **Цурков В. И.**		
Шарова В. А. см. **Балашова Н. Н.**		
Шафранский С. В. см. **Белов Ю. А.**		
Шахлевич Н. В. см. **Сотсков Ю. Н.**		
Шутенко В. И. см. **Байда С. И.**		
Шухов А. Г. см. **Горбачев Н. В.**		
Щеглов А. Ю. см. **Богатырев В. А.**		
Щенников С. Ю. см. **Хорошевский В. Ф.**		
Юдин Д. Б. см. **Цой Э. В.**		
Яко Э. см. **Фролов А. Б.**		
Якупов Р. Т. Оптимальная фильтрация в группе идентичных линейных динамических объектов при наблюдении рассогласований компонент их векторов состояния	3	219
Яхно Т. М. см. **Гринберг С. Я.**		

Технический редактор *Н. Н. Беляева*

Сдано в набор 15.11.90 Подписано к печати 18.01.91 Формат бумаги $70\times108^1/_{16}$
Высокая печать Усл. печ. л. 19,6 Усл. кр.-отт. 30,7 тыс. Уч.-изд. л. 21,7 Бум. л. 7,0
Тираж 1544 экз. Зак. 703 Цена 3 р. 30 к.

Адрес редакции: 125319, Москва, ул. Викторенко, 7, Тел. 157-94-18
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 6

3 р. 30 к.

Индекс 70405

В магазинах «Академкнига»

имеются в продаже:

ИНФОРМАТИКА И НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). 1987. 189 с. 65 к.

В статьях видных ученых раскрывается роль информатики в развитии науки и производства. Особый интерес представляет обсуждение вклада информатики в социальный прогресс, ее внедрение в различные сферы жизни общества.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Фролова Г. В. **ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ЭВМ.** Опыт. Проблемы. Перспективы. 1988. 171 с. 70 к.

Автор в популярной форме знакомит читателя-неспециалиста с возможностями и перспективами применения электронно-вычислительной техники в обучении, воспитании и развитии личности. Рассматривается опыт школ, профтехучилищ, вузов Сибири и других районов страны. Анализируются психолого-педагогические проблемы. Приводится интересный документальный материал, в частности описание уроков с использованием компьютера.

Книга предназначена для широкого круга читателей, интересующихся проблемами обучения и воспитания.

Заказы просим направлять по одному из перечисленных адресов магазинов «Книга — почтой» «Академкнига»:
117393 Москва, ул. Академика Пилюгина, 14, корп. 2;
197345 Ленинград, Петрозаводская ул., 7;
252208 Киев, ул. «Правды», 80«а»;
630090 Новосибирск, Академгородок, Морской проспект, 22.